

# Experimentale og theoretiske Undersøgelser

over

## Legemernes Brydningsforhold.

Af

**L. Lorenz.**

Vidensk. Selsk. Skr., 5 Række, naturvidenskabelig og matematisk Afd., 8 Bd. V.

---

**Kjøbenhavn.**

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

# Experimentale og theoretiske Undersøgelser

over

## Legemernes Brydningsforhold.

Af

**L. Lorenz.**

Vidensk. Selsk. Skr., 5 Række, naturvidenskabelig og matematisk Afd. S B. V.

---

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

1869.

Ved en Række Undersøgelser, hvoraf nærværende danner den første, afsluttede Del, har jeg fornemmelig havt det Maal for Øje, gjennem Studiet af Legemernes Forhold til Lyset og da navnlig af Legemernes Lysbrydning og Farvespredning, at komme til nærmere Kundskab om Legemernes indre molekulære Tilstande. Dette Maal har jeg søgt at naae dels ad Forsøgets, dels ad Theoriens Vej.

Der er vel allerede med Hensyn til Legemernes Brydningsforhold et meget betydeligt Iagttagelsesmateriale for Haanden, og dette er navnlig i de senere Aar blevet forøget med mange værdifulde Bidrag af gode Iagttagelser, men det viser sig dog snart, at netop de smaa Størrelser, hvorpaa det i theoretisk Henseende væsentlig kommer an, ikke ere bestemte med tilstrækkelig Nøjagtighed, dels fordi man ikke har taget det tilbørlige Hensyn til den betydelige Indflydelse paa Resultaterne, som Farvespredningen medfører, dels fordi man først ved at lade den i Reglen benyttede Methode for Bestemmelsen af Brydningsforholdet, nemlig ved Hjælp af Prismet, gaae Haand i Haand med en anden, langt nøjagtigere Methode, Interferensmethoden, kan opnaae den Skarphed i Bestemmelsen, som Theorien nødvendig fordrer.

Medens jeg derfor har søgt at bestemme Virkningen af Farvespredningen omhyggeligere, end det hidtil har været anset for nødvendigt, har jeg tillige anstillet en Række Forsøg, hvorved den sidstnævnte Methode er bragt i Anvendelse til Bestemmelse af Forandringerne i Vandets Brydningsforhold ved forskellige Varmegrader.

Endnu mere end Iagttagelser har man dog maattet savne en Theori, som kunde vise Forbindelsen imellem Legemernes Brydningsforhold og deres molekulære Tilstande, idet man, efter at det første Forsøg paa en Theori, som fremsattes af *Laplace*, havde mistet sin Betydning med Emissionstheorien, har maattet nøjes med at opstille og prøve rent empiriske Formler, af hvilke Formlerne  $(n^2 - 1) v = \text{konstant}$ , og  $(n - 1) v = \text{konstant}$ , hvor  $n$  er Legemets Brydningsforhold,  $v$  dets Rumfang, have naaet at erholde en vis Betydning og Berettigelse.

I en Afhandling om Lysets Theori (*Poggendorffs Annalen* Bd. 121) har jeg allerede tidligere gjort et Forsøg paa ad Approximationens Vej at fremstille en Theori for Brydningsforholdet, men det er først i nærværende Afhandling lykkedes mig ganske at overvinde de Vanskeligheder, som møde, naar man søger at gennemføre denne Theori uden at gaae ud fra

særskilte og indskrænkende Hypotheser om Legemernes indre molekulære Tilstande. Farvespredningens Theori, som her ikke er medtaget, vil blive gjort til Gjenstand for en særskilt Undersøgelse.

## I.

### Vandets Brydningsforhold ved forskellige Varmegrader.

Et Legemes Brydningsforhold aftager i Reglen, naar Legemet udvider sig ved at gaae over fra en Varmegrad til en anden. Men fra denne Regel gives der nogle Undtagelser, hvilket er paavist først af *Rudberg* og senere af *Fizeau* for Kalkspathens Vedkommende, af Sidstnævnte tillige for nogle Glassorter og af *Jamin* for Vand imellem 0 og 4° C. Da imidlertid Forandringerne i Farvespredningen slet ikke ere undersøgte ved de førstnævnte Legemer, idet kun *Rudberg* efter et Skjøn angiver, at Kalkspathens Farvespredning ikke synes at have forandret sig ved Opvarmningen, og da disse Forandringer heller ikke for Vandet ere bestemte med den Nøjagtighed, som ved saa smaa Rumfangsforandringer er nødvendig, saa bliver det endnu tvivlsomt, om disse Undtagelser ere Farvespredningsfænomener eller ere virkelig gjældende ogsaa for det for Farvespredningen befriede Brydningsforhold.

Er  $n$  et Legemes Brydningsforhold for en bestemt Farve, hvis Bølgelængde i det dispersionsfrie Rum er  $\lambda$ , saa kan, som *Cauchy* først har vist,  $n^2$  og altsaa ogsaa  $n$  udvikles i en Række efter stigende Potenser af  $\frac{1}{\lambda^2}$ . Sættes altsaa

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (1)$$

hvor  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ere af Bølgelængden uafhængige Konstanter, saa vil det altsaa kunne betragtes som godtgjort af Erfaringen, at idetmindste nogle af disse Konstanter ikke ere Funktioner af Legemets Tæthed alene, men tillige af dets Varmegrad. Saaledes er Vandets Brydningsforhold ikke det samme ved 0° og ved en Varmegrad imellem 8° og 9° C., medens Vandets Rumfang her dog er det samme som ved 0°. Men vi vide ikke, om dette ogsaa gjælder for alle Konstanterne, og navnlig om det gjælder for den første.

Denne Konstant  $A$ , som betegner Brydningsforholdet for en uendelig stor Bølgelængde, og som vi ville kalde det *reducerede Brydningsforhold*, er det af Vigtighed nærmere at bestemme for de forskellige Legemer, og navnlig fremstiller der sig altsaa først den i theoretisk Henseende vigtigste Opgave, ved Forsøg at afgjøre, om denne Konstant er Funktion af Legemets Rumfang alene. Er  $dA$  den Forandring i det reducerede Brydningsforhold, som svarer til de samtidige Forandringer  $dv$  og  $dt$  af Rumfang og Varmegrad, og betegnes ved  $\delta$  de partielle Differentiationer, saa er

$$dA = \frac{\delta A}{\delta v} dv + \frac{\delta A}{\delta t} dt, \quad (2)$$

og det gjælder da om ved Forsøg at afgjøre, om  $\frac{\delta A}{\delta t}$  er Nul eller ikke. At det sidste er Tilfældet, tør man efter de ovenfor gjorte Bemærkninger ikke betragte som allerede afgjort ved de nævnte Iagttagelser, som kun gjælde for det sammensatte Brydningsforhold  $n$ ; for det første Alternativt taler derimod Luftarternes Forhold, idet det synes som om disses Brydningsforhold ere fuldkommen uafhængige af Varmegraden, naar Rumfanget ikke forandres. Men heller ikke dette Punkt kan dog endnu betragtes som fuldkommen afgjort ved Iagttagelser, og det turde vistnok fordre en langt omhyggeligere Prøvelse, end der hidtil er blevet det til Del.

Det Legeme, som næst efter Luftarterne bedst egner sig til at fremkalde en Betsvarelse af Spørgsmaalet om Varmens umiddelbare Indflydelse paa det reducerede Brydningsforhold, er uden Tvivl Vandet, dels fordi dette ved de lavere Varmegrader forandrer sit Rumfang overordentlig lidt, hvorved en af Rumfangsforandringerne uafhængig Indflydelse af Varmen bedst vilde kunne blive iagttaget, dels fordi det har et Maximum af Tæthed og i det Hele udvider sig med stor Uregelmæssighed, hvorved det giver god Lejlighed til at prøve, om den samme Uregelmæssighed eller rettere den samme Lov gjør sig gjældende i Forandringerne af det reducerede Brydningsforhold indenfor de meget smaa Rumfangsforandringer ved de lavere Grader. Hertil kommer, at Vandets Udvidelse er, navnlig ved *Matthiessens* Maalinger (Pogg. Ann. Bd. 128), bestemt med en overordentlig høj Grad af Nøjagtighed. Det er derfor heller intet Under, at Vandets Brydningsforhold fra saa mange Sider er gjort til Gjenstand for grundige Undersøgelser, som jeg i det Følgende vil faae Lejlighed til nærmere at omtale.

De Forsøg, som ere anstillede med Prismet over Vandets Brydningsforhold ved forskellige Varmegrader, ere imidlertid endnu utilstrækkelige, fordi det ikke er muligt paa denne Maade at opnaae en Nøjagtighed, som kan stilles lige med den, hvorved Vandets Rumfang er bestemt for de forskellige Varmegrader. Interferensmethoden har alene *Jamin*, som er den første, der har gjort denne Methode praktisk anvendelig, benyttet i dette Øjemed, men det er dog ikke lykkedes ham herved at opnaae nogen større Nøjagtighed, hvilket allerede kan sees af den Form, hvori hans Resultater fremtræde, idet Forandringerne i Brydningsforholdet kun ere angivne for *hvidt* Lys. Dog er det klart og for første Gang fremgaaet af hans Forsøg, at Vandets Brydningsforhold for det synlige Lys ikke har sit Maximum ved  $4^\circ$ .

Den af *Jamin* indførte Methode bestaaer i at lade Lyset i en skraa Retning falde paa et planparallelt Glas, hvorved enhver Lysstraale adskilles i to parallelle Straaler, hvoraf den ene tilbagekastes fra Spejlets forreste Flade, den anden brydes og tilbagekastes fra den bageste, i Reglen belagte, Flade. Disse to Straaler bringes atter i Forening ved at falde paa et andet med det første parallelt stillet Spejl af samme Tykkelse, idet den første Straale

her tilbagelægger den samme Vej, som den anden har tilbagelagt i det første Spejl, og omvendt. Lader man nu de to adskilte Straaler passere to jevnside liggende lige lange Rør, fyldte med Vand, saa vil man ved at betragte Forskydelsen af de ved Straalernes Forening fremkomne Interferensstriber kunne iagttage enhver Forandring af Vandets Brydningsforhold i et af Rørene.

I de paatænkte Forsøg skulde Vandet i de to Rør have forskellige Varmegrader, hvorfor det var af Vigtighed at faae de to Lysstraaler temmelig vidt skilte fra hinanden, og af den Grund maatte de to Spejle have en betydelig Tykkelse. Jeg benyttede derfor ikke, saaledes som man hidtil har gjort, to Spejle skaarne af *et* Stykke Planglas, men lod i det Sted forfærdige hos Direktor *Mertz* i München to ligestore, paa de fire Sideflader polerede Glasterninger. Disse vare i alle Henseender fortrinlig udførte, og de viste kun en meget ringe Forskjel i Dimensionerne, der vare opgivne til  $1\frac{1}{2}$  fransk Tomme. Maalte med et Sfærometer fandtes følgende Tal for Afstanden mellem to modstaaende Flader:

Terningen <i>A.</i>	Terningen <i>B.</i>
103,052	103,024
102,970	102,915

Altsaa fandtes meget nær 103 Sfærometerinddelinger, som svarede til  $41,57^{\text{mm}}$ , for alle Flader. For tillige at undersøge, hvorvidt Glasmassen var ens i begge Terningerne, stilledes de tæt ved Siden af hinanden, hver foran sin Spalte, og et ved de to Spalter frembragt Interferensspektrum iagttoges i en Kikkert. Den fra den ulige Tykkelse af de to Terninger hidrørende Forskydelse af dette Spektrums Midtstriben viste sig nu saavel i Henseende til Størrelse som Retning ganske saaledes, som man efter de anførte Maalinger kunde vente, hvoraf altsaa saaes, at de to Terningers Brydningsforhold maatte være fuldkommen ens. Ogsaa kunde man af Stribernes Regelmæssighed bedømme Glasmassens fortrinlige Renhed og Ensartethed.

Som reflekterende Flader i Spejlene valgtes nu de, hvis Afstande i de to Terninger viste den mindste Forskjel (103,052 og 103,024), som var  $0,011^{\text{mm}}$ . Dernæst bleve de to Flader, der skulde tjene som Spejlens Bagside, belagte med Sølvspejl.

Som Lyskilder benyttedes de ensfarvede Natrium- og Lithium-Flammer. I en koncentreret Opløsning af Clornatrium sattes efter *Kettlers* Anvisning («Ueber die Farbenzerstreuung der Gase») en Væge af Asbest, som holdtes til Flammen af en Bunsens Brænder. Foruden dette gule Lys benyttedes det blandede røde og gule Lys, som erholdtes med en koncentreret Opløsning af Chlorlithium, som indeholdt meget lidt Chlorlithium. Ogsaa blev der paa forskellige Maader gjort Forsøg med Thalliumflammen, men skjøndt jeg med denne kunde erholde smukke Interferensstriber, saalænge de interfererende Straaler kun havde Luften at passere, saa var det mig ikke muligt, naar Vandsojlerne vare indskudte, at faae Striberne saa tydelige, at de kunde benyttes til nøjagtige Maalinger.

Den ene af de to Terninger, *A*, Fig. 1 (S. 211), befæstedes i uforanderlig Stilling paa et solidt Jernstativ, den anden, *B*, blev stillet i Centrum af en horisontal, inddelt Skive, 200<sup>mm</sup> i Diameter, som var bevægelig om en vertikal Axe og kunde fint indstilles ved en i Periferien indgribende horisontal Skrue *c*. Dette Stativ hvilede paa tre vertikale Stilleskruer og dets Underlag kunde forskydes horisontalt, lodret paa Terningernes Forbindelseslinie. Efterat de spejlende Flader vare indstillede vertikale, beholdtes ved Indstilling af Terningen *B* Interferensstriberne fra Natriumflammen i *L*, hvorefter man ved en parallel Forskydelse af Stativets Fodstykke og forandret Stilling af Flammen søgte at træffe den fordelagtigste Indfaldsvinkel for Lysstraalerne; denne Indfaldsvinkel valgtes noget mindre end 45°. Striberne, som vare synlige med blotte Øjne, bleve gjorte betydelig større og tydeligere ved Anbringelsen af de to Lindser *a* og *b*. Den første, paa hvilken et Traadkors var befæstet, var et større Samleglas, med en Brændvidde af 320<sup>mm</sup>; den anden, som var anbragt i nogen Afstand fra den første, var mindre og havde en Brændvidde af 40<sup>mm</sup>, og gjennem dette betragtedes da det forstørrede Billede af Striberne tilligemed Traadkorset. Dette System fandtes her at være det fordelagtigste; Anbringelsen af en Samlelindse imellem Flammen og den første Terning viste sig u hensigtsmæssig.

Striberne saaes, paa Grund af den uundgaaelige Fejl i de spejlende Fladers Planparallelisme, skarpest i en bestemt Stilling, nemlig naar de dannede en Vinkel paa omtrent 60° med Horisonten. De kunde ved Omdrejning af en af de vertikale Skruer, hvorpaa Stativet hvilede, gjøres mer eller mindre stejle, medens man ved den horisontale Skrue var Herre over deres Forskydelse indtil en ringe Brøkdæl af en Stribes Brede. De skraat stillede Striber viste sig retlinede og, betragtede som staaende i den tydelige Synsviddes Afstand, omtrent 3<sup>mm</sup> adskilte fra hinanden; der kunde, naar Rørene vare indskudte imellem Terningerne, oversees paa engang omtrent 20 Striber, som overalt stode lige tydelige og skarpe i hele det rektangulære Synsfeldt. Foruden disse Striber kunde man ogsaa, naar ingen Rør vare skudte ind imellem Terningerne, iagttage i nogen Afstand til Siden to andre Systemer af smallere Striber, som ved Terningens Omdrejning bleve forskudte i modsat Retning af de første. Det ene af disse Systemer hidrørte fra Interferens af to Lysstraaler, hvoraf enhver var tilbagekastet fra den ene af de to Terningers forreste Flade, medens den i den anden Terning havde lidt en tredobbelt Tilbagekastning i Terningens Indre, nemlig en total Tilbagekastning fra Terningens ene Sideflade, en anden fra den belagte Bagflade og en tredie atter total fra den anden Sideflade. Det ringe Tab i Lysstyrke ved disse Tilbagekastninger og Terningernes nøjagtige Form bevirkede, at disse Striber kunde sees meget tydeligt. Af samme Grunde kunde endog det tredie System af Striber, som viste sig umiddelbart ved Siden af det foregaaende, og som maatte hidrøre fra en *sexdobbel*t indre Tilbagekastning, endnu tydelig iagttages.

En anden Iagttagelse, jeg havde Lejlighed til at gjøre med disse Terninger, forinden

de belagtes med Sølvspejl, turde heller ikke være uden Interesse. De opstilledes paa lignende Maade, som ovenfor er beskrevet, men vare omdrejede saaledes, at Diagonalerne i de to Terningers kvadratiske Grundflader laae i en ret Linie. Idet Natriumflammen stilledes bag den ene Terning i Forbindelsesliniens Retning, faldt Lyset paa den nærmeste Kant af den første Terning, blev her af de to Flader brudt i to forskellige Retninger og traadte ud af Terningen i to parallelle Straaler i over en Tommes Afstand fra hinanden. Disse to Straaler opfangedes af den anden Terning og traadte ud af dennes modstaaende Kant i en meget lille Afstand fra hinanden. Man kunde da her, dog kun naar Lyskilden begrændsedes af en smal Spalte, med en Kikkert iagttage Interferensstriber. Skjønt man ved denne Opstilling har den Fordel at kunne arbejde med gennemgaaende Lys, ere Striberne dog for smalle til at kunne benyttes, hvilket hidrører fra, at de to interfererende Lysstraalear udtræde fra to forskellige Flader og derfor, om de end bringes nok saa nær til hinanden, bestandig i det Væsentlige forholde sig som om de udtraadte fra to Spaltaabninger, medens de i de Jaminske Spejle kunne udtræde fra samme Punkt i en Flade.

Til at optage det Vand, som skulde undersøges, tjente Apparatet *C* Fig. 1 og Fig. 2. Dettes Fodstykke (*e e*) var en 327<sup>mm</sup> lang, 80<sup>mm</sup> bred, solid Metalplade, hvortil Apparatets ligesaa brede Endestykker (*e e'*) vare befæstede og fast forbundne ved stærke Metalribber. Disse Endestykker, som vare 180<sup>mm</sup> høje, bare to foroven aabne Kar eller Truge *F* og *F'* med rektangulære Gjennemsnit, som indvendig maalte 71<sup>mm</sup> i Højde, 32<sup>mm</sup> i Brede. Imellem disse to Truge var et Mellemrum af 5,5<sup>mm</sup>; det ene af dem (*F*) var gennemskaaret paa Midten og denne Gjennemskæring atter udfyldt med en blød Kit, saa at det frit kunde udvide og sammentrække sig ved Opvarming eller Afkøling. Til Gjennemgang for Lysstraalearne tjente rektangulære, 28<sup>mm</sup> høje og 11<sup>mm</sup> brede, Aabninger for Enden af ethvert af Trugene; Mellemrummet imellem disse Aabninger var 19,7<sup>mm</sup> bredt. De vare lukkede indvendig med tynde Glimmerblade (0,10<sup>mm</sup> tykke), som adskilte Trugene fra to smaa aabne Beholdere *h* og *h'* af ferniseret Træ. Disse, som indtoge Apparatets Brede, vare lukkede med 6<sup>mm</sup> tykke Speilglasplader (*l* og *l'*), som kun lode et Mellemrum af 20<sup>mm</sup> imellem sig og Apparatets Endestykker, hvortil de smaa Beholdere vare befæstede. Glaspladerne vare iforvejen prøvede ved at holdes imellem Terningerne, medens Interferensstriberne iagttoges, og havde ved disse Forsøg vist sig fortrinlig brugbare.

Ved en Skjærm *m* var hele Apparatet beskyttet mod Varmeudstraalingen fra Flammen (*L*); tillige var der imellem denne og Terningen *A* anbragt en stor og tyk Glimmerplade *n* til Beskyttelse for Terningen mod Straalevarmen.

Forsøgene bleve i Reglen anstillede paa følgende Maade.

Begge Trugene (*F* og *F'*) og de to smaa Beholdere (*h* og *h'*) fyldtes næsten til Randen med destilleret Vand af Luftens Varmegrad, hvorpaa Terningen *B* indstilledes, indtil Striberne traadte fuldkommen skarpt frem. Undertiden benyttedes ogsaa en Gasflamme for



Fig. 1.

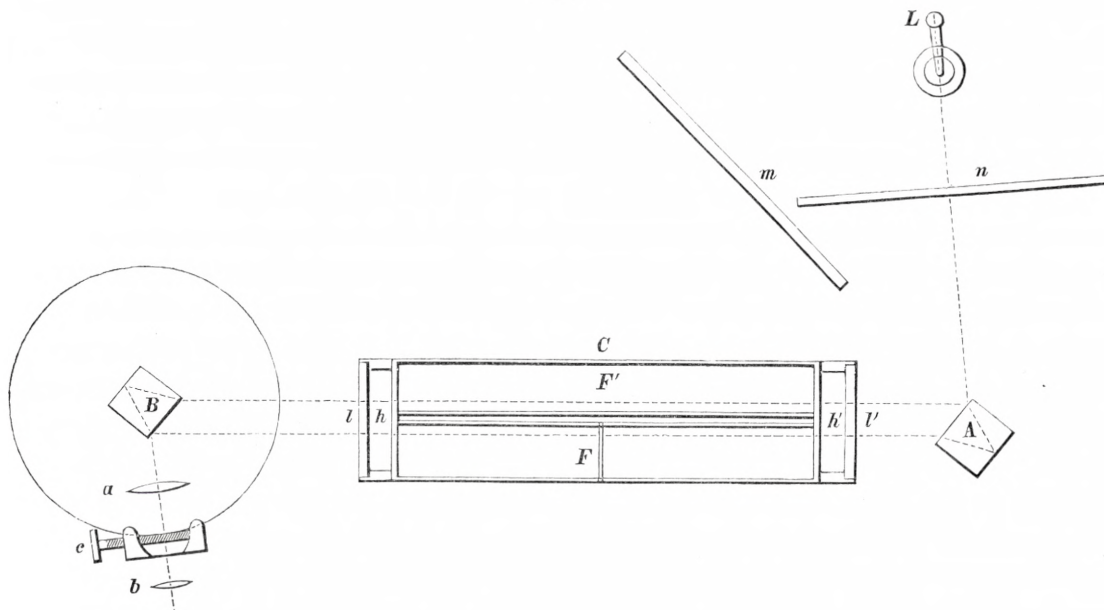
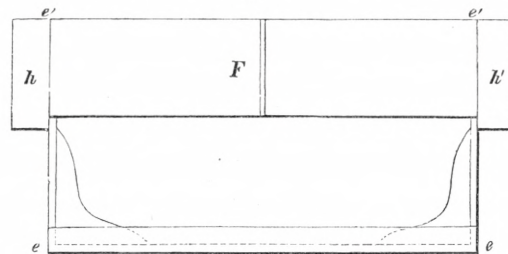


Fig. 2.



at indstille omtrent paa Midtstriben; en bestemt hvid Midtstribe gaves der iøvrigt ikke. Det Vand som benyttedes til Forsøgene var destilleret, men ikke ved Udkogning befriet fra Luft, da man dog ikke kunde hindre Luftens Adgang til Vandet, hvorved let en større Fejl ved Luftens Indsugning under Forsøget kunde blive begaaet. Den samme Bemærkning er ogsaa gjort af *van der Willigen* ved hans Forsøg over Vandets Brydningsforhold.

Efterat Terningerne vare indstillede, toges en Del (omtrent  $\frac{1}{5}$ ) af Vandet i det gjennemskaarne Trug op med en Hævert og opvarmedes omtrent  $20^{\circ}$ ; derefter blandedes det atter med det tilbageblevne Vand i Truget. Denne Blanding maatte skee med Forsigtighed og blev altid udført saaledes, at det varmere Vand lededes gennem Hæverten til Bunden af Truget under stadig Bevægelse af Hæverten frem og tilbage. Dernæst blev Vandet i alle

fire Beholdere omhyggelig omrørt, og den samme Proces kunde da gjentages en eller to Gange.

Naar man ikke anvendte den her angivne Forsigtighed ved Vandets Opvarming, eller hvis man drev denne for vidt, saa blev Følgen den, at Striberne hurtigt under Forsøgets følgende Gang bleve utydelige, fortrukne og tilsidst ganske forsvandt. Vel kunde man da atter ved Omstilling af Terningen faae dem frem igjen, men man vil let indsee, at Resultatet da ikke kunde være nøjagtigt, hvorfor jeg heller ikke har optegnet noget Forsøg, hvor dette har været nødvendigt. Man kan af denne Grund ikke fjerne sig mere end et vist begrændset Antal Grader fra Luftens Varmegrad, hvorfor ogsaa Forsøgene bleve anstillede til forskjellige Aarstider, fra det forløbne Aars Foraar indtil henimod Aarets Slutning.

Iagttagt man nu Striberne strax efter Omrøringen, viste det sig, at de forbleve fuldkommen ubevægelige i omtrent en Minut, dernæst begyndte de at forskydes med en stedse voxende Hastighed, som dog snart naaede et Maximum, hvorved Tiden for Forskydelsen af en Stribe kunde naae ned indtil omtrent 5 Sekunder; derefter aftog Hastigheden ganske regelmæssig. Den Tid efter Omrøringen, da Striberne vare stillestaaende, benyttedes til Aflæsningen af Thermometrene, som vare anbragte et i hvert Trug. Man talte dernæst Antallet af Striber, som passerede Traadkortet, og vedblev hermed, indtil der medgik mindst en Minut til Forskydelsen af en Stribe. Nu blev Vandet atter omrørt under stadig Iagttagelse og Tælling af Striberne, og det var da selvfølgelig af Vigtighed, at Striberne ikke forsvandt ved denne Omrøring, hvilket kun kunde opnaaes, naar man havde fortsat Tællingen saa længe, som ovenfor angivet. I Reglen kunde Stribernes Antal ved Omrøringen af Vandet i det varmere Trug blive forøget med nogle faa Hele; ved Omrøringen af de smaa Beholdere forandredes det kun en Brøkdæl, og Omrøringen i det koldere Trug formindskede det atter lidt.

Nu bleve Thermometrene atter aflæste, saa at de altsaa, hvad der var en nødvendig Betingelse for at erholde gode Resultater, saavel ved Forsøgets Begyndelse som ved dets Slutning aflæstes, naar Varmegraden i Beholderne var *stationær* og *ensformig*.

Det vil let indsees, at Stribernes Forskydelse fornemmelig har sin Grund i det varmere Vands Afkøling ved Meddelelse og Udstraaling af Varme til de andre koldere Beholdere og til de øvrige Omgivelser, hvorimod det koldere Vand, som før Thermometrenes første Aflæsning allerede var blevet noget varmere end den omgivende Luft, kunde holde sig temmelig nær paa samme Varmegrad under hele Forsøget.

Man vil i det Følgende see, at der i Forsøgene opnaaedes en meget tilfredsstillende Grad af Nøjagtighed og indbyrdes Overensstemmelse. Disse gode Resultater tilskriver jeg fornemmelig to Omstændigheder: Spejlglassenes Adskillelse fra det varmere Vand ved de smaa ydre Beholdere, og Omrøringen af Vandet i de temmelig store, aabne Truge. Naar nemlig begge de ulige varme Vandsojler umiddelbart lukkedes med Spejlglassene, saa bleve

Striberne ved Glassenes ulige Opvarming meget snart utydelige og tilsidst ganske udvidskede. Endnu slettere Resultater gav det, at lukke enhver af Vandsejlerne med sit Planglas, og det blev derfor nødvendigt at tilføje de to ydre smaa Beholdere, som da bleve adskilte fra de to Vandsejler ved meget tynde Glimmerblade.

Ligeledes beholdtes slette Resultater ved nogle Forsøg, hvor Vandet som Lysstraaerne skulde passere, var indespærret i to lukkede rektangulære Rør, som omgaves af Vandet i Trugene. Rørene vare overskaarne paa Midten og atter sammenføjede med Kautschuk. To Thermometre i ethvert af Rørene angave Vandets Varmegrad, men det viste sig, at denne ikke kunde blive ganske ensformig, idet der dannede sig ulige varme Lag, som bevirkede, at Striberne fortrak sig stærkt, og at Varmegraden ikke nøjagtig kunde bestemmes. Man erholdt derfor temmelig afvigende Resultater ved Begyndelsen og mod Slutningen af ethvert Forsøg.

Man vil have bemærket, at kun det ene af Trugene var overskaaret, medens det andet, for at bevare Apparatets Styrke, var helt. For at undersøge om denne Omstændighed muligen kunde virke forstyrrende og ved en ligelig Opvarming af begge Trugene allerede frembringe en Forskydelse af Striberne, sattes en varm Metalplade ind i Mellemlummen imellem de to Truge. Resultatet heraf var imidlertid ikke nogen Forskydelse af Striberne; disse bleve kun, efterhaanden som Varmen udbredte sig til de nærmeste Vandlag, mer og mer utydelige.

Mellemlummet imellem Trugene var under Forsøgene ikke udfyldt med slette Varmeledere, da dette ikke viste sig hensigtsmæssigt, formodentlig fordi Varmemeddelingen derved koncentreredes for stærkt til Endefladerne.

De i nedenfor staaende Tabel angivne Tal ere Resultater af Forsøg, som alle vare anstillede paa den ovenfor angivne Maade; kun i de to sidste Forsøg var Temperaturforskellen frembragt ved Afkøling istedenfor ved Opvarming. De to Thermometre, som her benyttedes, vare begge af *Fastré*, inddelte efter en vilkaarlig Skala. Der fandtes ved en omhyggelig Bestemmelse af Frysepunkt og Kogepunkt følgende Formler for Varmegraden  $t$  i Centigrader

$$t = -18,985 + 2,6511 T_1$$

$$t = -2,763 + 2,0877 T_2$$

idet  $T_1$  og  $T_2$  ere de af de to Thermometre angivne Grader. Af disse benyttedes det første ( $T_1$ ) i Truget  $F'$ , det andet i  $F$ . I begge Thermometrene var hver Grad inddelt i 10 Dele, og disse vare tilstrækkelig store til at man med temmelig Sikkerhed kunde aflæse Tiendedelene af dem.

Den første Række i nedenstaaende Tabel indeholder Forsøgenes Rækkefølge, den anden og fjerde de ved Begyndelsen og Slutningen af ethvert Forsøg aflæste Grader, den tredje

og femte de heraf beregnede Grader i Centigrader, og den sidste Antallet (*s*) af forskudte Striber fra Natriumflammen.

Nr.	$T_1$	$t_1$	$T_2$	$t_2$	$s$
1 {	15,22	21,36	13,30	25,00	} 175,3
	15,30	21,58	11,75	21,77	
2 {	15,90	23,16	14,20	26,88	} 199
	15,90	23,16	12,44	23,21	
3 {	16,02	25,49	14,41	27,32	} 204
	16,17	23,88	12,81	23,98	
4 {	17,87	28,39	16,01	50,66	} 107
	17,86	28,36	15,13	28,82	
5 {	18,78	30,80	17,91	34,63	} 254
	18,68	30,54	16,07	30,79	
6 {	18,77	30,78	17,69	34,17	} 209
	18,66	30,49	16,00	30,64	
7 {	15,00	15,48	11,16	20,34	} 189
	15,00	15,48	9,10	16,24	
8 {	12,20	15,36	10,60	19,37	} 221
	12,47	14,07	8,30	14,56	
9 {	11,76	12,19	10,00	18,11	} 215,5
	12,18	13,30	7,84	13,60	
10 {	10,11	7,82	8,46	14,90	} 198
	10,62	9,17	6,00	9,76	
11 {	9,20	5,40	6,21	10,20	} 89,6
	9,70	6,73	4,86	7,38	
12 {	9,40	5,94	6,22	10,22	} 76
	9,80	7,00	5,11	7,90	
13 {	9,31	5,70	2,60	2,67	} 21
	9,27	5,59	3,49	4,52	
14 {	8,78	4,29	2,02	1,45	} 11,5
	8,75	4,21	2,80	3,08	

I de efterfølgende Forsøg benyttedes et Thermometer af *Geissler*, som var inddelt i Tiendedels Grader C. Det viste 0,40 Grad ved Frysepunktet og korrigeredes derfor ved Subtraktion af 0,40 Grad. Disse Forsøg bleve, med Undtagelse af de tre første, anstillede paa en anden Maade, som her ved de lave Varmegrader gav et nøjagtigere Resultat. Det vil nemlig bemærkes, at Antallet af forskudte Striber stærkt aftager med Varmegraden og bliver meget ringe ved de lavere Varmegrader. Naar man nu havde bragt Vandet i Truget *F* ned til omtrent 0°, medens Vandet i det andet Trug maatte holdes nær ved 4° C., som omtrent var Luftens Varmegrad under alle disse Forsøg, saa havde de uundgaelige smaa Forandringer i den sidstnævnte Vandsøjles Varmegrad en altfor stor Indflydelse paa Resultaterne, til at man med Nøjagtighed kunde bestemme den lille Forskydelse, som skyldtes den anden koldere Vandsøjles Opvarming. Af de efter den tidligere Methode anstillede

Forsøg har jeg derfor kun beholdt tre (de tre første i nedenstaaende Tabel), hvor tilfældigvis Vandet i Truget  $F'$  havde holdt sig nøjagtig paa den samme Varmegrad ved Forsøgets Begyndelse og ved dets Slutning. De andre Forsøg bleve udførte paa følgende Maade. Truget  $F$  fyldtes med Vand ved omtrent  $0^\circ$ , medens Vandet i de andre Beholdere var lidt under Luftens Varmegrad. Efter tilstrækkelig Omrøring iagttoges Thermometret i  $F$ , hvorpaa lidt Vand af 2 til 4 Graders Varme paa sædvanlig Maade blandedes med Vandet i dette Trug under samtidig Iagttagelse af Striberne. Efter at have erholdt en Forskydelse af en eller flere Striber, standsede man Tilledningen, der omrørtes alene i dette Trug og de smaa Beholdere, og Thermometret iagttoges. Et saadant Forsøg varede saa kort, at Vandet i det andet Trug, efter den tidligere gjorde Erfaring, ikke i denne Tid kunde ved Forandring af Varmegrad have frembragt nogen Stribeforskydelse, naar det kun efter den første Omrøring henstod roligt. Denne Forsøgsmaade gav gode Resultater og var meget let at udføre; men det er en Selvfølge, at den samme Methode ikke vilde have været anvendelig ved højere Varmegrader, hvor den mindste ulige Fordeling af Varmen vilde virke langt stærkere paa Striberne og snart bringe dem til at forsvinde.

Den nedenforstaaende Tabel indeholder under Rækken  $t$  Vandets Varmegrad i Truget  $F'$  ved Forsøgets Begyndelse, under  $t'$  Varmegraden ved Forsøgets Slutning og under  $s$  Antallet af forskudte Striber fra Natriumflammen.

Nr.	$t$	$t'$	$s$
15	1,77	2,57	5
16	0,95	2,10	5
17	1,80	2,60	5
18	0,50	1,31	2,2
19	0,32	1,43	3
20	1,19	1,45	1
21	0,32	0,80	1
	0,20	0,90	1
	0,45	0,95	1
	0,25	0,89	1
	0,25	0,80	1
	0,39	0,96	1

De sidste 6 under Nr. 21 angivne Resultater give som Middel en Forskydelse af 1 Stribe ved en Opvarming fra  $0,310^\circ$  til  $0,883^\circ$  C., hvilke Middelværdier ere benyttede i Beregningen istedenfor de enkelte Værdier.

Beregningen af Forsøgene ere udførte paa følgende Maade. Er  $s(t)$  Antallet af Striber, som forskydes ved en Opvarming af Vandsojlen i Truget  $F'$  fra  $0^\circ$  til  $t^\circ$  C., og er

altsaa  $\frac{ds(t)}{dt}$  Forholdet imellem det ved Temperaturtilvæksten  $dt$  forskudte Stribeantal og denne Tilvæxt, saa kan man sætte

$$\frac{ds(t)}{dt} = a + bt + ct^2 + \dots \quad (3)$$

$$s(t) = at + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{3}ct^3 + \dots \quad (4)$$

Naar den nævnte Vandsøjle  $F'$  opvarmes fra  $t_1$  til  $t_1'$  Grader, medens den anden ligesaa store Vandsøjle  $F''$  opvarmes fra  $t_2$  til  $t_2'$  Grader, saa er Antallet  $s$  af forskudte Striber bestemt ved

$$s = s(t_1') - s(t_1) - s(t_2') + s(t_2). \quad (5)$$

Man maa nu for ethvert Forsøg søge at bestemme den Varmegrad  $t$ , som tilfredsstiller Ligningen

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{s}{\Delta}, \quad (6)$$

idet  $\Delta$  er Differensen af Temperaturtilvækterne i de to Truge, eller

$$\Delta = t_1' - t_1 - t_2' + t_2. \quad (7)$$

Hvis de ovenforstaaende Rækker (3) og (4) kun indeholdt de to første Led, saa vilde man ifølge (5) have

$$s = a\Delta + \frac{1}{2}b(t_1'^2 - t_1^2 - t_2'^2 + t_2^2),$$

og sættes under denne Forudsætning  $\tau$  istedenfor  $t$  i Ligningerne (6) og (3), ville disse give

$$s = a\Delta + b\tau\Delta.$$

Af disse to Ligninger følger

$$\tau = \frac{t_1'^2 - t_1^2 - t_2'^2 + t_2^2}{2\Delta}. \quad (8)$$

Efter denne Formel er  $\tau$  beregnet for ethvert af Forsøgene, hvorefter Konstanterne  $a$ ,  $b$  og  $c$  beregnes ved de mindste Kvadraters Methode. Der fandtes

$$\frac{c}{b} = -0,011,$$

et Resultat, som var tilstrækkelig nøjagtigt til Beregningen af  $t$ . Man vil nemlig, naar ogsaa det tredje Led medtages i Rækkerne (3) og (4), ifølge Ligningerne (4), (5), (7) og (8), have

$$s = a\Delta + b\tau\Delta + \frac{1}{3}c(t_1'^3 - t_1^3 - t_2'^3 + t_2^3),$$

som ved Ligningerne (3) og (6) giver

$$a + bt + ct^2 = a + b\tau + \frac{c}{3\Delta}(t_1'^3 - t_1^3 - t_2'^3 + t_2^3),$$

hvoraf den lille Korrektion  $t - \tau$ , som i Forsøgene ikke overstiger nogle faa Hundredele af  $1^\circ$  C., let beregnes.

Efterat denne Korrektion var indført, beregnes de tre Koefficienter nøjagtig ved

de mindste Kvadraters Methode, saaledes at Summen af Kvadraterne af Fejlene i  $\frac{s}{\Delta}$  blev et Minimum. Den fundne Formel var

$$\frac{d s_{Na}}{d t} = -0,041 + 3,0190 t - 0,03448 t^2, \quad (a)$$

idet her  $s_{Na}$  er sat istedenfor  $s(t)$ .

Denne Formel gjælder kun fra  $t = 0$  indtil  $t = 30^\circ$  C. Det viste sig nemlig ved den første Beregning, at de to Forsøg, i hvilke  $t$  var højere end  $30^\circ$ , gave noget for høje Resultater, hvilket tydede paa, at den antagne Formel med tre Konstanter ikke uden at skade Nøjagtigheden lod sig anvende ud over de  $30^\circ$ . Disse to Forsøg bleve derfor ikke medtagne ved den endelige Beregning, og Forskydelsen af Striberne maa for  $t > 30^\circ$  C. sættes højere end den ved Formlen beregnede.

I nedenstaaende Tabel ere de af Forsøgene udledede Værdier af  $\Delta$ ,  $\tau$ ,  $t$ ,  $s$  og  $\frac{s}{\Delta}$  angivne, og for den sidste tillige den efter Formlen (a) beregnede Værdi.

Nr.	$\Delta$	$\tau$	$t$	$s$	$\frac{s}{\Delta}$		Diff.
					Forsøg	Beregning	
5	5,58	52,87	52,83	254	65,42		
6	5,24	52,58	52,55	209	64,57		
4	1,81	29,76	29,75	107	59,12	59,26	-0,14
3	5,74	25,42	25,40	204	54,58	54,40	+0,18
2	5,67	25,05	25,03	199	54,16	55,92	+0,24
1	5,47	25,26	25,24	175,3	50,84	51,50	-0,66
7	4,30	18,39	18,37	189	45,94	45,78	+0,16
8	5,52	16,52	16,48	221	40,05	40,35	-0,30
9	5,62	15,23	15,19	215,5	38,33	57,86	+0,47
10	6,49	11,53	11,48	198	50,52	50,07	+0,45
12	5,38	8,25	8,24	76	22,49	22,49	0
11	4,14	7,91	7,89	89,6	21,62	21,61	+0,01
13	1,96	5,71	5,71	21	10,69	10,69	0
14	1,71	2,35	2,35	11,5	6,73	6,86	-0,13
17	0,80	2,20	2,20	5	6,25	6,43	-0,18
15	0,80	2,17	2,17	5	6,25	6,35	-0,10
16	1,15	1,52	1,52	5	4,35	4,47	-0,12
20	0,26	1,32	1,32	1	5,87	5,88	-0,01
18	0,81	0,90	0,90	2,2	2,72	2,65	+0,07
19	1,11	0,87	0,87	3	2,70	2,56	+0,14
21	0,573	0,596	0,596	1	1,745	1,716	0

Heri er  $\Delta$  beregnet med tre Decimaler, hvorfra en tilsyneladende Uoverensstemmelse i det sidste Ciffer i nogle af Værdierne for  $\frac{s}{\Delta}$  hidrører. Da de under Nr. 21 angivne

Tal ere et Middel af 6 Iagttagelser, er der ved Beregningen tillagt dem den sexdobbelte Vægt.

Det vil sees, at det ved Forsøgene fundne Antal Striber, som forskydes ved en Opvarming af  $1^{\circ}$  C., kun i et Forsøg afviger med  $\frac{2}{3}$  Stribe fra det ved Beregning fundne, medens Afvigelsen i alle de andre Forsøg er mindre end  $\frac{1}{2}$ . Den sandsynlige Fejl er 0,17, et Resultat, som maa betragtes som særdeles tilfredsstillende.

Ved disse Forsøg benyttedes ofte den blandede Natrium-Lithiumflamme for paa samme Tid at tælle Antallet af røde Striber; desuden anstilledes flere Forsøg særskilt med Hensyn til disse. Ved Tællingen af Striberne benyttedes som Udgangspunkt en rød Midtstribe imellem to gule Striber eller en gul Stribe midt imellem to røde, da disse Striber skarpere lode sig iagttage end Coincidensen af en gul og en rød Stribe. Jeg talte da Antallet af de forskudte gule og røde Striber, indtil der naedes en Stribe, som ganske var stillet paa samme Maade som den, hvorfra Tællingen begyndte.

Ved Varmegraderne over  $25^{\circ}$  C. fandtes stedse det samme Forhold imellem Antallet af forskudte røde og gule Striber, saaledes fandtes 91 røde mod 105 gule Striber ved en Middeltemperatur af  $26,34^{\circ}$  C., 78 røde mod 90 gule ved  $32,5^{\circ}$  C., o. s. v. Istedesfor alle disse Forsøg er i nedenstaaende Tabel kun angivet eet, hvor Varmegraden  $29,3^{\circ}$  C. er et Middel af Varmegraden i de forskjellige Forsøg, der gave det samme Forhold (13 : 15) imellem de røde og gule Striber.

Ved de lavere Varmegrader indtraadte derimod en betydelig Forandring i dette Forhold, og det var navnlig interessant at see, hvorledes ved den laveste Varmegrad den røde Midtstribe blot ved en Forskydelse af 1 gul Stribe kunde forflytte sig flere Striber i samme Retning som Bevægelsen af de gule Striber, idet man saaledes fik Vandets mærkelige Farvespredningsforhold ved de lavere Varmegrader saa at sige umiddelbart for Øje. Ved de ovenfor under Nr. 21 angivne 6 Forsøg havde saaledes den røde Midtstribe, som blev indstillet paa Traadkorsets Midte, under Forskydelsen af den ene gule Stribe forskudt sig 3 Striber. Man maa, for ret at forstaae Betydningen heraf, bemærke, at Afstanden imellem to røde Striber paa det nærmeste var  $\frac{8}{7}$  Gange større end Afstanden imellem to gule. Hvis nu for Exempel de røde Striber vare stillestaaende, medens de gule forskjøde sig, saa vilde man see den røde Midtstribe flytte sig hurtigt i samme Retning, og efter Forskydelsen af 1 gul Stribe vilde dens første Plads være indtaget af den næste røde Midtstribe. Naar, saaledes som i ovennævnte Forsøg, den røde Midtstribe under Forskydelsen af 1 gul Stribe havde flyttet sig tre Striber, saa var de røde Stribers Forskydelse  $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$  imod 1 gul Stribe. Paa denne Maade kunde saavel ved disse Forsøg, som ved andre, hvor det hele Antal af forskudte Striber kun var meget ringe, Forholdet bestemmes med stor Nøjagtighed.

Den nedenstaaende Tabel indeholder Resultaterne af Forsøgene. Under  $t$  findes



Middeltallet af de to Varmegrader ved Tællingens Begyndelse og dens Slutning; da imidlertid disse i Reglen ikke kunde findes umiddelbart, fordi de ikke ganske faldt sammen med de to Varmegrader ved Forsøgets Begyndelse og Slutning, maatte denne Middeltemperatur  $t$  findes ved en Beregning, som jeg dog har troet at være for lidet betydende til her at optegne. Den næste Række indeholder det fundne Forhold imellem Antallet af forskudte røde og gule Striber; af dette Forhold og den efter Formlen (a) beregnede Værdi af  $\frac{d s_{Na}}{d t}$  findes dernæst den tilsvarende Størrelse  $\frac{d s_{Li}}{d t}$  for de røde Straaler. Heraf fandtes ved de mindste Kvadraters Methode Formlen

$$\frac{d s_{Li}}{d t} = 0,450 + 2,6410 t - 0,03027^2, \quad (b)$$

hvorefter Rækken  $\frac{d s_{Li}}{d t}$  (b) er beregnet.

$t$	rød : gul.	$\frac{d s_{Na}}{d t}$	$\frac{d s_{Li}}{d t}$	$\frac{d s_{Li}}{d t}$ (b)	Diff.
29,3	15 : 15	58,81	50,97	50,94	+0,03
25,0	27 : 52	51,16	44,24	44,28	-0,04
15,3	100 $\frac{1}{2}$ : 116 $\frac{1}{2}$	58,08	52,85	52,87	-0,02
15,3	124 $\frac{1}{2}$ : 144 $\frac{1}{2}$	54,12	29,40	29,32	+0,08
9,0	59 : 69	24,34	20,81	20,87	-0,06
8,0	58 : 68	21,90	18,68	18,74	-0,06
4,6	10 $\frac{1}{2}$ : 12 $\frac{1}{2}$	15,12	11,02	11,06	-0,04
5,2	10 : 12	9,27	7,72	7,69	+0,03
2,1	9 : 11	6,15	5,03	4,96	+0,07
1,73	4 : 5	5,08	4,06	4,03	+0,03
1,60	5 $\frac{3}{4}$ : 4 $\frac{3}{4}$	4,72	5,73	5,70	+0,03
1,21	5 : 4	5,56	2,67	2,70	-0,03
0,88	2 $\frac{1}{2}$ : 5 $\frac{1}{2}$	2,59	1,85	1,85	0
0,60	$\frac{5}{8}$ : 1	1,75	1,09	1,11	-0,02

Beregningen er udført med 1 Decimal mere, end her er angivet. Det vil sees, at Afvigelserne fra de efter Formlen (b) beregnede Værdier ikke overstige 0,08.

Af de to saaledes fundne Formler skulde dernæst Forandringerne  $dn_{Na}$  og  $dn_{Li}$  af Natrium- og Lithiumlysets Brydningsforhold ved Temperaturtilvæksten  $dt$  beregnes. Betegnes Længden af en af de to ligestore Vandsøjler ved  $L$ , og Bølgelængderne for Natrium- og Lithiumlyset ved  $\lambda_{Na}$  og  $\lambda_{Li}$ , saa er

$$L \frac{dn_{Na}}{dt} = - \frac{ds_{Na}}{dt} \lambda_{Na}$$

$$L \frac{dn_{Li}}{dt} = - \frac{ds_{Li}}{dt} \lambda_{Li}$$

Vandsøjlerne Længde  $L$  var Afstanden imellem de to Glimmerblade, som begrænsede dem, da Vandet i de ydre smaa Beholdere, som blev omrørt ved Begyndelsen og Slutningen af ethvert Forsøg, ikke bidrog til Forskydelsen af Striberne. Der fandtes

$$L = 317,6^{\text{mm}}.$$

Til Grund for Bølgelængdernes Bestemmelse lagdes *Ångströms* Maalinger (Pogg. ann. 123), som for D'striberne give i Metermaal

$$\lambda_{Na} = 10^{-6} \cdot 589,75^{\text{mm}}.$$

Endvidere er efter *Ketteler* (Beobacht. über die Farbenzerstreuung)

$$\frac{\lambda_{Li}}{\lambda_{Na}} = 1,138953,$$

hvilket Tal kun meget lidt afviger fra de af *Fizeau* (Pogg. Ann. 119) og *Rühlmann* (Pogg. Ann. 132) fundne Forhold, som ere 1,13846 og 1,13927. Da disse Tal gjælde for Bølgelængderne i Luften, ville ogsaa de for Vandets Brydningsforhold fundne Tal gjælde for Brydningsforholdet fra Luft til Vand.

Man finder nu af Formlerne (a) og (b)

$$\frac{d n_{Na}}{d t} = 10^{-6} [0,076 - 5,606 t + 0,06403 t^2], \quad (\text{A})$$

$$\frac{d n_{Li}}{d t} = 10^{-6} [0,952 - 5,586 t + 0,06402 t^2]. \quad (\text{B})$$

Den sandsynlige Fejl heri er tre Enheder i syvende Decimal, en Nøjagtighed, som er mindst 50 Gange større end den, hvormed de samme Størrelser kunne bestemmes ved Hjælp af Prismet.

Det vil af disse Ligninger sees, at Natriumliniens Brydningsforhold har et Maximum ved  $0,014^{\circ}$  C., medens dette for Lithiumlinien ligger ikke lidet højere, nemlig ved  $0,171^{\circ}$  C.

Ved Integration findes, idet den til Brydningsforholdet svarende Varmegrad tilføjes i en Parenthes,

$$n_{Na}(t) = n_{Na}(0) + 10^{-6} [0,076 t - 2,803 t^2 + 0,02134 t^3] \dots \dots \dots (\text{A}')$$

$$n_{Li}(t) = n_{Li}(0) + 10^{-6} [0,952 t - 2,793 t^2 + 0,02134 t^3] \dots \dots \dots (\text{B}')$$

Disse Resultater ville vi sammenstille med dem, andre Iagttagere have fundet. Til de fuldstændigste Iagttagelser over Vandets Brydningsforhold høre *Rühlmanns* (Pogg. Ann. 132), som har fundet Formlerne

$$n_{Na}(T) = 1,33374 + 10^{-6} [-3,147 T^2 + 0,0001205 T^4]$$

$$n_{Li}(T) = 1,33154 + 10^{-6} [-3,072 T^2 + 0,0001123 T^3]$$

for Varmegraden  $T$  bestemt i Réaumur's Grader og gjældende fra  $T=0$  indtil  $T=80^{\circ}$  R. Søges til Exempel af disse Formler Forskjellen imellem Brydningsforholdet for Natriumlinien ved  $20^{\circ}$  C. og  $30^{\circ}$  C., vil man finde  $n_{Na}(20) - n_{Na}(30) = 0,00097$ .

Af *Jamins* Forsøg, som for hvidt Lys har Formlen (Comptes rendus T. 43)

$$n(t) = n(0) - 10^{-6} [12,573 t + 1,929 t^2],$$

vil man finde

$$n(20) - n(30) = 0,001091.$$

Af *Willners* Iagttagelser (Pogg. Ann. 133), erholdes

$$n(20) - n(30) = 0,00099,$$

og af *Landolts* Iagttagelser (Pogg. Ann. 117) findes

$$n_{Na}(20) - n_{Na}(30) = 0,00105,$$

medens nærværende Forsøg ifølge Formlen (A') for denne Størrelse give

$$0,000973.$$

Mindre Overensstemmelse erholdes ved Sammenligningen med *Rühlmanns Formel* ved de lavere Varmegrader, men gaae vi tilbage til de *Forsøg*, hvoraf denne Formel er udledet, komme vi til det mærkelige Resultat, at de her fundne Formler stemme bedre med *Rühlmanns* Iagttagelser end dennes egne Formler, og det endog navnlig ved de højeste Varmegrader (indtil 30° C.), ved hvilke Fejlene i nærværende Forsøg maatte have opsummeret sig og vist sig stærkest. Den mindre gode Overensstemmelse imellem *Rühlmanns* Formler og hans Forsøg hidrører derfra, at han har ladet den samme Formel gjælde fra 0 indtil 80° R., istedenfor at beregne to Formler, gjældende f. Ex. fra 0 indtil 24° R. og fra 24° R. indtil 80° R., paa samme Maade, som man ogsaa har fundet det nødvendigt for Formlerne for Vandets Udvidelse ved Varmegraderne fra Frysepunkt til Kogepunkt.

Nedenstaaende Tabel indeholder Resultaterne af de af *Rühlmanns* Forsøg over Brydningsforholdet for det gule Lys, som ligge under 24° R. Hertil er føjet de af *Rühlmann* selv og de efter Formlen (A') beregnede Værdier, idet Brydningsforholdet ved 0° er sat lig 1,33378.

<i>T</i>	Forsøg (R)	Beregn. (R)	Diff.	Beregn. (A')	Diff.
0	1,33375	1,33374	+0,1	1,33378	-0,3
0	1,33380	1,33374	+0,6	1,33378	+0,2
1,2	1,33375	1,73274	+0,1	1,33377	-0,2
3,2	1,33372	1,33371	+0,1	1,33374	-0,2
4,0	1,33371	1,33369	+0,2	1,33371	0
4,6	1,32368	1,33368	0	1,33369	-0,1
7,9	1,33355	1,33355	0	1,33353	+0,2
8,0	1,33353	1,33355	-0,2	1,33352	+0,1
8,2	1,33350	1,33354	-0,4	1,33351	-0,1
10,2	1,23340	1,33343	-0,3	1,33337	+0,3
11,8	1,3333	1,3333	0	1,33324	+1
18,4	1,3328	1,3327	+1	1,3326	+2
18,8	1,3325	1,3326	-1	1,3325	0
19,6	1,3324	1,3325	-1	1,3324	0
20,9	1,3323	1,3324	-1	1,33225	+0,5
25,7	1,3319	1,3319	0	1,3319	0

Tilsvarende findes for det røde Lys følgende Tabel:

$T$	Forsøg (R)	Beregn. (R)	Diff.	Beregn. (B')	Diff.
0	1,33155	1,33154	+0,1	1,33156	-0,1
1,0	1,33150	1,33153	-0,3	1,33156	-0,6
3,0	1,33152	1,33152	0	1,33153	-0,1
3,8	1,33151	1,33149	+0,2	1,33150	+0,1
4,3	1,33150	1,33148	+0,2	1,33149	+0,1
7,9	1,33132	1,33134	-0,2	1,33132	0
8,1	1,33131	1,33133	-0,2	1,33131	0
10,1	1,33125	1,33123	+0,2	1,33117	+0,8
12,3	1,3311	1,3311	0	1,3310	+1
17,2	1,3304	1,33065	-2,5	1,3305	-1
18,1	1,3304	1,3305	-1	1,3304	0
22,4	1,3299	1,3300	-1	1,3299	0

Vi skulle nu af de erhholdte Resultater søge at udlede Formlen for Vandets reducerede Brydningsforhold,  $A(t)$ , og antage da dette udviklet efter Potenser af  $t$ , nemlig

$$A(t) = A(0) + 10^{-6} [\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3].$$

Da Koefficienterne til  $t^3$  ere ligestore for  $n_{Na}(t)$  og  $n_{Li}(t)$  i Formlerne (A') og (B'), vil den ogsaa her blive den samme, altsaa er

$$\gamma = 0,02134.$$

Endvidere ere Koefficienterne til  $t^2$  i de to Formler saa lidet forskellige, at  $\beta$  med tilstrækkelig Nøjagtighed maa kunne bestemmes af Dispersionsformlen med kun to Konstanter, nemlig af Ligningerne

$$n_{Na}(t) = A(t) + \frac{B(t)}{\lambda_{Na}^2} \text{ og } n_{Li}(t) = A(t) + \frac{B(t)}{\lambda_{Li}^2}.$$

Ved Elimination af  $B(t)$  findes heraf, med Benyttelse af det tidligere brugte Tal for Forholdet imellem de to Bølgelængder,

$$A(t) = n_{Li}(t) - 3,3646 (n_{Na}(t) - n_{Li}(t)). \quad (9)$$

Heraf findes ved Sammenligning mellem Koefficienterne til  $t^2$

$$\beta = -2,759.$$

Derimod kan denne Ligning, som forudsætter kun to Konstanter i Dispersionsformlen, aabenbart ikke benyttes for Koefficienterne til  $t$ , da disse i Formlerne (A') og (B') ere saa højest forskellige. Idet altsaa Koefficienten  $\alpha$  endnu maa lades ubestemt, vil man have

$$A(t) = A(0) + 10^{-6} [\alpha t - 2,759 t^2 + 0,02134 t^3], \quad (C')$$

og heraf ved Differentiation

$$\frac{dA(t)}{dt} = 10^{-6} [\alpha - 5,518 t + 0,06402 t^2]. \quad (C)$$

*Matthiessen* har (Pogg. Ann. 128) for Vandets Rumfang imellem  $4^\circ$  og  $32^\circ$  C. angivet følgende Formel:

$$v = 1 - 0,0000025300 (t - 4) + 0,0000083890 (t - 4)^2 - 0,00000007173 (t - 4)^3.$$

Heraf findes ved Differentiation med Hensyn til  $t$

$$\frac{dv}{dt} = -10^{-6} [73,085 - 18,4996 t + 0,21519 t^2],$$

som ogsaa kan gives Formen

$$\frac{dv}{dt} = -10^{-6} \cdot 3,3613 [21,743 - 5,504 t + 0,06402 t^2], \quad (10)$$

idet man saaledes faaer den samme Koefficient til  $t^2$  indenfor Parenthesen, som findes i ovenstaaende Formel (C).

Man vil nu ved en Sammenligning mellem de to Udtryk for  $\frac{dA(t)}{dt}$  og  $\frac{dv}{dt}$  finde en meget nær Overensstemmelse mellem Koefficienterne til  $t$  indenfor Parentheserne, idet den ene af disse kun er omtrent  $\frac{1}{400}$  større end den anden, en Afvigelse, som er saa lille, at det bliver et ganske uvæsentligt Spørgsmaal, om den skal antages at hidrøre fra en ufuldstændig Bestemmelse af Farvespredningen eller fra Iagttagelsesfejl.

Der bliver da det Spørgsmaal tilbage, om man ogsaa tør antage  $\alpha$  og 21,743 ligestore, eller, hvad der er det samme, om det reducerede Brydningsforhold  $A(t)$  ligesom Vandets Vægtfylde har sit Maximum ved  $4^\circ$  C. Det blev under Formlerne (A) og (B) bemærket, at Natriumliniens Brydningsforhold har sit Maximum ved  $0,014^\circ$  C., medens dette for Lithiumlinien ligger ved  $0,171^\circ$  C., en Forskjel, som for to saa nærliggende Spektrallinier er meget betydelig og som ogsaa paa en paafaldende og karakteristisk Maade fremtraadte umiddelbart under Forsøgene. Naar nu Maximum af Brydningsforholdet for Bølgelængden  $\lambda_{Na} = 10^{-6} \cdot 589,75^{\text{mm}}$  ligger ved  $0,014^\circ$  C., og for Bølgelængden  $\lambda_{Li} = 10^{-6} \cdot 671,70^{\text{mm}}$  ved  $0,171^\circ$  C., saa bliver det ikke usandsynligt, at det for en uendelig stor Bølgelængde kan komme til at ligge ved  $4^\circ$  C., eller hvis omvendt dette sidste var givet og tillige, at Brydningsforholdets Maximum for  $\lambda_{Na}$  var omtrent ved  $0^\circ$ , saa vilde man neppe kunne vente, at det for  $\lambda_{Li}$  skulde ligge højere, end det i nærværende Forsøg er fundet.

Gaae vi tilbage til den i Begyndelsen af denne Afhandling fremsatte Ligning (2) eller

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t},$$

og indsættes heri de i Ligningerne (C) og (10) angivne Værdier for  $\frac{dA}{dt}$  og  $\frac{dv}{dt}$ , saa sees det, at den, indenfor de smaa Rumfangforandringer af Vandet imellem 0 og  $30^\circ$  C., tilfredsstilles ved

$$\frac{\delta A}{\delta v} = -\frac{1}{3,3613} = -0,2976, \quad (11)$$

og 
$$\frac{\delta A}{\delta t} = 10^{-6} (\alpha - 21,743).$$

Det sidste Udtryk er altsaa ifølge det ovenfor anførte sandsynligvis lig Nul, saa at der som *Resultatet af nærværende Forsøg fremgaaer, dels en nøjagtig Bestemmelse af Forholdet imellem Forandringerne af Vandets reducerede Brydningsforhold imellem 0 og 30° C. og dets tilsvarende Rumfangsudvidelse, dels en vis Grad af Sandsynlighed for, at dette Brydningsforhold er alene Funktion af Rumfanget.*

Vi ville nu af andre Iagttageres Forsøg over Vandets Brydningsforhold søge at bestemme det reducerede Brydningsforhold ved 0°, hvorved det da først bliver nødvendigt nærmere at undersøge Farvespredningen.

Man danner sig hurtig et Begreb om et Legemes Farvespredning ved en grafisk Konstruktion, som ogsaa er et let Middel til at skaffe sig en ret god Bestemmelse af det reducerede Brydningsforhold. Paa en i mange smaa Kvadrater inddelt Tavle afsættes som Abscisse med en vilkaarlig Enhed de reciproke Kvadrater af de Bølgelængder, for hvilke Brydningsforholdet er fundet, medens det tilsvarende Brydningsforhold, som kan formindskes med en vilkaarlig Konstant, afsættes som Ordinat. En Kurve igjennem de saaledes bestemte Punkter vil jeg kalde «*Dispersionskurven*».

For Vandets Vedkommende har jeg fundet, hvad senere nærmere skal blive godtgjort ved Tal, at denne Kurve efter *alle* bekjendte Iagttagelser ved almindelige Varmegrader er *konvex*, det vil sige, vender Konvexiteten i alle bekjendte Punkter i Ordinataxens positive Retning. Denne Konvexitet aftager med Varmegraden, Kurven bliver ifølge *Rühlmanns* Iagttagelser retliniet ved 80° C. og gaaer derefter over til at blive konkav.

At dette nu ikke er en Særegenhed, som kun gjælder for Vandets Vedkommende, kan man overbevise sig om ved til Exempel at kaste et Blik paa *Wüllners* særdeles gode Bestemmelser af forskjellige Legemers Brydningsforhold (Pogg. Ann. 133). Dette er bestemt for Brintspektrets tre Linier ( $H_\alpha$ ,  $H_\beta$  og  $H_\gamma$ ), og Kurven er i *Wüllners* Beregning betragtet som retliniet, idet der til Beregningen kun er benyttet to Konstanter i Dispersionsformlen. Saaledes finder *Wüllner* for Glycerin

	iagt.	beregnet	Diff.
$n_\alpha$	1,453177	1,453210	— 33
$n_\beta$	1,460868	1,460804	+ 64
$n_\gamma$	1,465064	1,465097	— 33

saaat altsaa de iagttagne Værdier af Brydningsforholdet for den mindste og den største Bølgelængde ere lavere, for den mellemste højere, end de beregnede, hvoraf følger, at Dispersionskurven ogsaa for Glycerin er konvex. Det samme gjælder for alle Blandinger af

Glycerin og Vand, for Blandingen af 1 Alkohol og 2 Glycerin, saavel som for Chlorzinkopløsningens forskjellige Blandinger med Vand.

Disse Exempler turde være tilstrækkelige til at gjøre det uomtvisteligt, at Dispersionskurven *kan være konvex*. Jeg lægger Vægt paa denne Kjendsgjerning, fordi den staaer i bestemt Modstrid med *Christoffels* Dispersionsformel (Pogg. Ann. 117), som man i alle senere Undersøgelser ikke har undladt at tage Hensyn til og tillagt stor Betydning, hvad den ogsaa ganske vist maatte have, hvis den viste sig overensstemmende med Erfaringen. *Christoffel* har nemlig af *Cauchy's* Dispersionstheori, udledet Formlen

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}},$$

hvor i kun de to positive Konstanter  $n_0$  og  $\lambda_0$  indgaae, og som altsaa vilde gjøre det muligt, at bestemme Farvespredningen alene af to lagtagelser ved forskjellige Bølgelængder. Denne Formel er imidlertid uforenelig med en konvex Dispersionskurve. Sættes nemlig

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} = x, \quad n = y,$$

saa ere  $x$  og  $y$  Dispersionskurvens Koordinater, og man vil da have

$$y = \frac{n_0}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n_0}{4\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x})^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n_0}{8} \cdot \frac{1}{(1 - x)(1 + \sqrt{1 - x})^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - x}} + \frac{3}{2(1 + \sqrt{1 - x})} \right].$$

Heraf følger, idet  $x$  ikke kan være større end 1, at  $\frac{d^2y}{dx^2}$  er positiv for alle de Værdier,  $x$  kan have, og at altsaa Dispersionskurven altid maa være *konkav*.

Idet vi nu ville lægge *Cauchy's* Formel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \frac{D}{\lambda^6} + \dots$$

til Grund for Beregningen af  $A$ , vil det være til en væsentlig Lettelse for Regningen, forud at bestemme  $A$  som lineær Funktion af Brydningsforholdene for de forskjellige benyttede Spektrallinier. De forskjellige Bølgelængder, for hvilke Brydningsforholdene  $n_1, n_2, \dots, n_m$  ere bestemte, være betegnede ved  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , til Maal for hvilke en ganske vilkaarlig Enhed kan vælges. Sættes

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = p_1, \quad \frac{1}{\lambda_2^2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{1}{\lambda_m^2} = p_m,$$

have vi altsaa de  $m$  Ligninger

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= A + Bp_1 + Cp_1^2 + \dots, \\ n_2 &= A + Bp_2 + Cp_2^2 + \dots, \\ &\vdots \\ n_m &= A + Bp_m + Cp_m^2 + \dots, \end{aligned} \right\} (12)$$

og kunne ved disse bestemme ligesaa mange Konstanter  $A$ ,  $B$ , osv.

Betragte vi Ligningen

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_m}{(p_1 - x)(p_2 - x) \dots (p_m - x)} = \frac{p_1 \alpha_1}{p_1 - x} + \frac{p_2 \alpha_2}{p_2 - x} + \dots + \frac{p_m \alpha_m}{p_m - x}, \quad (13)$$

sees det ved Addition af Brøkerne paa højre Side, at Størrelserne  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\dots$   $\alpha_m$  tilfredsstille Ligningerne

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m &= 1, \\ \alpha_1 p_1^s + \alpha_2 p_2^s + \dots + \alpha_m p_m^s &= 0, \end{aligned} \right\} (14)$$

hvor Exponenten  $s$  kan være ethvert af de hele Tal fra 1 indtil  $m - 1$ , begge inklusive. Multipliceres altsaa den første Ligning (12) med  $\alpha_1$ , den anden med  $\alpha_2$ , osv., og adderes Resultaterne, erholdes

$$A = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_m n_m,$$

eller, under en for den numeriske Beregning bekvemmere Form,

$$A = n_1 + \alpha_2 (n_2 - n_1) + \alpha_3 (n_3 - n_1) \dots + \alpha_m (n_m - n_1). \quad (15)$$

Disse Koefficienter  $\alpha$  bestemmes nu let af Ligningen (13) ved Dekomposition af Brøken paa paa Ligningens venstre Side, hvorved findes

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{p_1 p_2 \dots p_m}{p_1 (p_2 - p_1)(p_3 - p_1) \dots (p_m - p_1)}, \\ \alpha_2 &= \frac{p_1 p_2 \dots p_m}{p_2 (p_1 - p_2)(p_3 - p_2) \dots (p_m - p_2)}, \\ &\vdots \\ \alpha_m &= \frac{p_1 p_2 \dots p_m}{p_m (p_1 - p_m)(p_2 - p_m) \dots (p_{m-1} - p_m)}. \end{aligned} \right\} (16)$$

Betegne vi saaledes de til  $Li$ -,  $Na$ - og  $Th$ -Flammen svarende Bølgelængder ved  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  og  $\lambda_3$ , og tage  $\lambda_1$  som Enhed, saa er efter *Ketteler*  $\frac{1}{\lambda_2} = 1,138953$ ,  $\frac{1}{\lambda_3} = 1,254636$ , hvoraf  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1,29721$ ,  $p_3 = 1,57411$ .

Dernæst beregnes ifølge (16), idet  $m$  er 3,  $\alpha_2$  og  $\alpha_3$ , hvilke Værdier, indsatte i (15) give

$$A = n_{Li} - 19,127 (n_{Li} - n_{Na}) + 8,160 (n_{Li} - n_{Th}). \quad (17)$$

Ved Beregningen af de følgende Formler ere *Ångströms* Bestemmelser af Bølgelængderne saavel for de Fraunhoferske som for Brintspektrrets Linier lagte til Grund. Betegnes Brydningsforholdene for disse sidste ved  $n_\alpha$ ,  $n_\beta$  og  $n_\gamma$ , saa findes

$$A = n_\alpha - 5,983 (n_\beta - n_\alpha) + 3,046 (n_\gamma - n_\alpha). \quad (18)$$



Af Brydningsforholdene  $n_B$ ,  $n_D$ ,  $n_E$  og  $n_G$  for de Fraunhoferske Linier  $B$ ,  $D$ ,  $E$  og  $G$  findes

$$A = n_B - 29,857 (n_D - n_B) + 17,197 (n_E - n_B) - 1,4948 (n_G - n_B), \quad (19)$$

og af Brydningsforholdene  $n_C$ ,  $n_E$ ,  $n_F$  og  $n_H$  for de Fraunhoferske Linier  $C$ ,  $E$ ,  $F$  og  $H$  findes

$$A = n_C - 28,145 (n_E - n_C) + 20,820 (n_F - n_C) - 1,5082 (n_H - n_C). \quad (20)$$

Ved de sidste to Bestemmelser ere altsaa de *fire* første Led af Dispersionsformlen medtagne. Hvorvidt man med Fordel kan gaae endnu videre og medtage flere Led, afhænger af den Nøjagtighed, hvormed Brydningsforholdet er bestemt, idet Iagttagelsesfejlene faae en bestandig større Indflydelse paa den beregnede Værdi af  $A$ , jo flere Led der medtages. Saaledes vise de ovenforstaaende to Ligninger, at en Fejl i et af Brydningsforholdene kan vise sig indtil næsten 30 Gange forøget i  $A$ ; dette turde derfor være Grænsen, hvortil man tør gaae, saalænge man ikke har opnaaet nogen større Nøjagtighed end den, der hidtil er naaet med Prismet. Tager man til Exempel de 7 første Led med af Dispersionsformlen og bestemmer  $A$  ved Brydningsforholdene for de 7 Fraunhoferske Linier fra  $B$  indtil  $H$ , saa vil en Fejl næsten kunne blive forøget 1000 Gange og Resultatet derved saa godt som blive fuldstændig ubestemt.

Vi skulle nu af de nøjagtigste bekjendte Iagttagelser søge at bestemme Vandets reducerede Brydningsforhold ved  $20^\circ$  C., i Nærheden af hvilken Varmegrad de fleste Iagttagelser ligge.

*Rühlmann* har for denne Varmegrad

$$n_{Li} = 1,33075, \quad n_{Na} = 1,33294, \quad n_{Th} = 1,13485,$$

og har heraf ved Beregning fundet

$$A = 1,32361, \quad \text{hvoraf } n_{Na} - A = 0,00931.$$

Her ere kun de *to* første Led af Dispersionsformlen medtagne og kun de *to* Brydningsforhold for *Li*- og *Th*-Linierne benyttede. Medtages derimod tre Led, erholdes ved Hjælp af Ligning (17)

$$A = 1,32232 \quad \text{og } n_{Na} - A = 0,01062,$$

altsaa en betydelig mindre Værdi for  $A$ .

*Landolt* (Pogg. Ann. Bd. 117 og 122) har for Brintspektrrets Linier ved  $20^\circ$  C.

$$n_\alpha = 1,33111, \quad n_\beta = 1,33712, \quad n_\gamma = 1,34038$$

og har, ligeledes med Benyttelse af kun *to* Konstanter i Dispersionsformlen, heraf fundet

$$A = 1,32392,$$

hvorimod man ved Formlen (18) finder

$$A = 1,32338.$$

For de samme Linier og samme Varmegrad har *Wüllner*

$$n_{\alpha} = 1,33116, \quad n_{\beta} = 1,33712, \quad n_{\gamma} = 1,34031,$$

hvoraf paa samme Maade er fundet

$$A = 1,32490,$$

hvorimod Beregningen efter (18) giver

$$A = 1,32337.$$

Af begge disse Iagttageres nær overensstemmende Resultater findes endvidere

$$n_{Na} = 1,33300.$$

*Fraunhofers* Maalinger af Vandets Brydningsforhold ved 15° R. have givet noget for høje Resultater, men de ere dog ikke uden Betydning med Hensyn til Farvespredningens Bestemmelse. Som Middel af to Rækker Forsøg findes

$$n_B = 1,330956, \quad n_C = 1,331711, \quad n_D = 1,333577, \quad n_E = 1,335850$$

$$n_F = 1,337803, \quad n_G = 1,341277, \quad n_H = 1,344170.$$

Heraf findes ved Formlen (19)

$$n_D - A = 0,01214$$

og ved Formlen (20)

$$n_D - A = 0,01030.$$

Idet vi forbigaae forskellige andre, mindre nøjagtige Iagttagelser, skulle vi endnu kun omtale *van der Willigens* (Verhand. der K. Akad. Amsterdam 1868).

Et Middel af Iagttagelserne ved 22,4° C. og 20° C. giver

$$n_B = 1,33035, \quad n_C = 1,33111, \quad n_D = 1,33295, \quad n_E = 1,33519,$$

$$n_F = 1,33707, \quad n_G = 1,34051, \quad n_H = 1,34336,$$

hvoraf ved Formlen (19) findes

$$n_D - A = 0,01218$$

og ved Formlen (20)

$$n_D - A = 0,01106.$$

Disse Tal, tilligemed de ovenfor af *Fraunhofers* Maalinger udledede, gjælde vel ikke nøjagtig for 20° C., men ligge dog saa nær herved, at en Korrektion med Hensyn hertil bliver saa godt som uden Betydning.

Som det sees, findes altsaa meget forskellige Værdier for  $n_D - A$  ved 20° C., nemlig med Benyttelse af to Konstanter i Dispersionsformlen:

$$0,00891 \text{ (Wüllner)}$$

$$0,00908 \text{ (Landolt)}$$

$$0,00931 \text{ (Rühlmann),}$$

med tre Konstanter

$$0,00963 \text{ (Wüllner)}$$

$$0,00962 \text{ (Landolt)}$$

$$0,01062 \text{ (Rühlmann)}$$

og med *fire* Konstanter

0,01030 (*Fraunhofer*)  
 0,01106 (*van der Willigen*)  
 0,01214 (*Fraunhofer*)  
 0,01218 (*van der Willigen*).

Disse Resultater ere i flere Henseender af Interesse. Det sees saaledes, hvor vanskelig og usikker Bestemmelsen af det reducerede Brydningsforhold er, idet Afvigelserne imellem de paa forskjellig Maade erholdte Resultater endog gaae indtil den tredie Decimal, og det turde heraf være indlysende, at Legemernes Farvespredning i det Hele taget, da Vandet vel neppe tør betragtes som nogen særlig Undtagelse, ikke lader sig tilstrækkelig nøjagtig bestemme ved Iagttagelsen af to eller tre Spektralliniers Brydningsforhold, saaledes som man i Almindelighed hidtil har antaget, men at det bliver nødvendigt at gjøre Legemernes Farvespredning til Gjenstand for et omhyggeligere og mere særligt Studium.

Uoverensstemmelsen i de ovenfor sammenstillede Værdier for  $n_D - A$  følger dog en vis Regelmæssighed, som kaster et Lys over Vandets Farvespredningsforhold. Af de større Tal, som erholdes, naar Beregningen udføres med tre Konstanter istedenfor med to, sees Dispersionskurvens Konvexitet, og man seer endvidere, at denne er større, naar Kurven bestemmes ved  $n_{Li}$ ,  $n_{Na}$ ,  $n_{Th}$ , end naar den bestemmes af Brydningsforholdene for Brintspektrrets Linier, som ligge nærmere henimod Spektrets mere brydbare Del. At dette ikke er tilfældigt, sees af de med 4 Konstanter beregnede Værdier, som netop ogsaa saavel efter *Fraunhofers* som efter *van der Willigens* Maalinger blive mindst, naar de beregnes af Brydningsforholdene for de stærkere brudte Straaler. Dispersionskurven er ifølge *Rühlmanns* Iagttagelser retliniet ved  $80^\circ$  C., den bliver med aftagende Varmegrad mere og mere konvex, og som vi see er dette fornemmelig Tilfældet for den mindre brydbare Del af Spektret. Hermed staaer det da i Forbindelse, at Brydningsforholdet f. Ex. for *D*-Linien ogsaa under  $4^\circ$  C. stiger med aftagende Varmegrad, idet det bliver sandsynligt, at dette alene skyldes Dispersionskurvens voxende Konvexitet og ikke en Forøgelse af det reducerede Brydningsforhold. Der bliver ogsaa en vis Grad af Sandsynlighed for, at Brydningsforholdets Maximum, som maaskee for en Bølgelængde imellem *D* og *E* ligger nøjagtig ved  $0^\circ$ , atter for den mere brydbare Del af Spektret ligger ved en højere Varmegrad, for *H*-Linien saaledes maaskee ikke langt fra  $2^\circ$  C.

Søge vi nu af de ovenfor anførte Iagttagelser at bestemme Vandets reducerede Brydningsforhold, saa sees det, at der vel ikke vil kunne opnaaes nogen stor Nøjagtighed, men at det dog i ethvert Tilfælde maa sættes betydelig lavere, end hidtil antaget. Bestemmelserne ved Hjælp af fire Konstanter maae være de nøjagtigste, og af disse ere igjen de, som ere udledede af *van der Willigens* Maalinger, i bedst indbyrdes Overensstemmelse. Et Middeltal af disse giver

$$n_D - A = 0,0116,$$

medens alle de nævnte Iagttagere, paa *Fraunhofer* nær, have næsten overensstemmende fundet

$$n_D = 1,3330.$$

Heraf følger

$$A = 1,3214,$$

gjældende for Vand ved 20° C.

Antage vi, hvad der nu af flere Grunde maa ansees for sandsynligt, at det reducerede Brydningsforhold har sit Maximum ved samme Varmegrad som Vandets Vægtfylde, saa er, som tidligere bemærket, den i Ligningerne (C) og (C') indgaaende Størrelse  $\alpha$  lig 21,743, naar *Matthiessens* Formel for Vandets Rumfang lægges til Grund, eller, da denne Formel giver en lidt for høj Varmegrad (4,15° C.) for dette Maximum, rigtigere

$$\alpha = 21,05,$$

som svarer til et Maximum for det reducerede Brydningsforhold nøjagtig ved 4° C.

Af Ligning (C') findes endvidere

$$A(0) = 1,3219,$$

hvorved denne Ligning bliver

$$A(t) = 1,3219 + 10^{-6} [21,05 t - 2,759 t^2 + 0,02134 t^3], \quad (C')$$

gjældende fra  $t = 0^\circ$  indtil  $t = 30^\circ$  C.

## II.

### Det reducerede Brydningsforholds Theori.

Udgangspunktet for nærværende theoretiske Undersøgelser over Legemernes Brydningsforhold danne de af mig i Pogg. Ann. Bd. 118 og 121 fremsatte Differentialligninger for Lyssvingningerne. Disse ere

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dy} \left( \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} \right) - \frac{d}{dz} \left( \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \right) &= \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} \right) &= \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right) &= \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2}, \end{aligned} \right\} (A)$$

idet  $x$ ,  $y$ ,  $z$  og  $t$  ere Rummets og Tidens Koordinater,  $\xi$ ,  $\eta$  og  $\zeta$  Lyssvingningernes Komposanter i Retning af de tre Axer, og  $\omega$  en Funktion af  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Denne sidste Funktion er for et *virkeligt* homogent Medium en konstant Størrelse og betegner da Lysets Hastighed i dette Medium; men som et virkeligt homogent Medium

betragtes kun det tomme Rum, det vil sige det Rum, der ikke indeholder nogen kjendelig Mængde af Materie, medens derimod alle homogene Legemer betragtes som kun *tilsyneladende* homogene. Funktionen  $\omega$  bliver derfor for saadanne Medier en *periodisk* Funktion af Rummets Koordinater, det vil sige, Summen af en Konstant og en ved kontinuerlig Forandring af Koordinaterne vekslede Størrelse, som regelmæssig i de samme Mellemrum, «*Perioder*», vender tilbage til den samme Værdi.

De almindelige Integraler af ovenstaaende Differentialligninger kunne gives Form som en Sum af Led, hvoraf ethvert indeholder en af Faktorerne

$$C = \cos (kt - lx - my - nz - d) \text{ og } S = \sin (kt - lx - my - nz - d),$$

idet  $k, l, m, n$  og  $d$  ere konstante Størrelser, som for de forskjellige Led kunne tillægges forskjellige Værdier.

Disse Faktorer ere, som man seer, periodiske Funktioner saavel med Hensyn til Rummet som til Tiden, og repræsentere en fremadskridende plan Bølge, hvis Periode i Retning af Bølgens Normal er *Bølgelængden* og med Hensyn til Tiden er *Svingningstiden*; Forholdet imellem disse er Lysets *Hastighed*.

Som Koefficienter til disse Faktorer indgaae Størrelser, der ganske afhænge af den eneste i Differentialligningerne givne Funktion af  $x, y, z$ , nemlig  $\omega$ , og som derfor, ligesom denne, maae være periodiske Funktioner med Hensyn til Rummet og med tilsvarende Perioder. Disse periodiske Funktioner kunne hver betragtes som en Sum af to Led, nemlig af en konstant Størrelse, som er Funktionens Middelværdi, og en *ren periodisk* Funktion, hvorved vi da forstaae en saadan, hvis Middelværdi er lig Nul. Funktionens «Middelværdi» findes ved Multiplikation med  $dx dy dz$ , Integration over enten hele eller en tilstrækkelig stor Del af Legemets Rumfang og Division med dette Rumfang.

Betragte vi nu det til en enkelt plan Bølge svarende Led af det almindelige Integral, ville vi altsaa kunne sætte

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (\xi_0 + \xi_2) C + \xi_1 S, \\ \eta &= (\eta_0 + \eta_2) C + \eta_1 S, \\ \zeta &= (\zeta_0 + \zeta_2) C + \zeta_1 S, \end{aligned} \right\} (1)$$

idet  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  ere *konstante* Størrelser,  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  og  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  *ren periodiske* Funktioner. I Koefficienterne til  $S$  ere de konstante Størrelser udeladte, da de kunne tænkes bortfaldne ved en Forflyttelse af Koordinaternes Begyndelsespunkt. Det er her alene Opgaven at bestemme det betragtede Legemes *reducerede Brydningsforhold*, det vil sige den Grændse, hvortil Forholdet imellem Lysets Hastighed i det tomme Rum og i Legemet nærmer sig, naar Bølgelængden bestandig voxer. Vi forudsætte altsaa, at Perioden i  $C$  og  $S$  i Retning af Bølgens Normal er *en Orden større*, end Perioderne i  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  o. s. v.

Indsættes de i Ligningerne (1) givne Udtryk for  $\xi, \eta$  og  $\zeta$  i Differentialligningerne

(A), saa vil der ved Differentiationerne fremkomme Størrelser af forskellige Ordener. Medens nemlig for Exempel

$$\xi_2 \frac{d^2 C}{dx^2} \text{ og } \xi_2 \frac{d^2 C}{\omega^2 dt^2}$$

i Almindelighed ere Størrelser af samme Orden, saa er derimod

$$\frac{d^2 \xi_2}{dx^2} C$$

i Almindelighed to Ordener større end disse, fordi Perioden i  $\xi_2$  er forudsat at være en Orden mindre end Perioden i  $C$ .

Nu maae alle Led af den højeste Orden indbyrdes hæve hverandre, hvorfor man ved den omtalte Substitution i Ligningerne (A) erhoder af den første Ligning

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{d\xi_2}{dy} - \frac{d\eta_2}{dx} \right) - \frac{d}{dz} \left( \frac{d\zeta_2}{dx} - \frac{d\xi_2}{dz} \right) = 0$$

og af de to andre Ligninger hermed analoge Udtryk.

Heraf følger da, at man maa have

$$\xi_2 = \frac{dF}{dx}, \quad \eta_2 = \frac{dF}{dy}, \quad \zeta_2 = \frac{dF}{dz}, \quad (2)$$

idet  $F$  er en periodisk Funktion.

Differentieres endvidere den første Ligning (A) med Hensyn til  $x$ , den anden med Hensyn til  $y$ , og den tredje med Hensyn til  $z$ , og adderes de saaledes erhodte Ligninger, saa vil man, da alle Led paa venstre Side forsvinde, erholve

$$0 = \frac{d}{dx} \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d}{dy} \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{d}{dz} \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2}.$$

Indsættes heri de ved (1) og (2) givne Udtryk for  $\xi$ ,  $\eta$  og  $\zeta$ , og bortkastes ligeledes her de Størrelser, som ere af lavere Orden, saa faaer man

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\omega^2} \left( \xi_0 + \frac{dF}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \frac{1}{\omega^2} \left( \eta_0 + \frac{dF}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \frac{1}{\omega^2} \left( \zeta_0 + \frac{dF}{dz} \right) = 0. \quad (3)$$

Heraf bliver da Funktionen  $F$  at bestemme med de Betingelser, som følge af Ligningerne (2), at dens Differentialkoefficienter med Hensyn til  $x$ ,  $y$ ,  $z$  blive *ren* periodiske Funktioner. Er  $dv$  et Element af Legemet,  $v$  dettes Rumfang eller en tilstrækkelig stor Del af dets Rumfang, saa skal man altsaa have

$$\int \frac{dv}{v} \frac{dF}{dx} = 0, \quad \int \frac{dv}{v} \frac{dF}{dy} = 0, \quad \int \frac{dv}{v} \frac{dF}{dz} = 0, \quad (4)$$

idet Integrationen udstrækkes over hele Rumfanget  $v$ .

Vi maae endvidere af Differentialligningerne (A) udlede de Ligninger, som kunne tjene til Bestemmelse af det reducerede Brydningsforhold. Ved Indsættelse af de i (1) givne Udtryk for  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  i Ligningerne (A) og Sammenligning af Koefficienterne til  $C$ , erhoddes af den første Ligning

$$(\ell^2 + m^2 + n^2) \xi_0 - \ell (\ell \xi_0 + m \eta_0 + n \zeta_0) + \Sigma = \frac{k^2}{\omega^2} (\xi_0 + \xi_2),$$

idet  $\Sigma$  er en Sum af *ren* periodiske Funktioner, som vi ikke behøve nærmere at angive.

Ved Multiplikation af denne Ligning med  $\frac{dv}{v}$  og Integration over Rumfanget  $v$  vil denne

Sum  $\Sigma$  altsaa forsvinde, og indsættes  $\frac{dF}{dx}$  istedenfor  $\xi_2$  ifølge (2), saa faaes paa denne

Maade den første af Ligningerne

$$\left. \begin{aligned} (\ell^2 + m^2 + n^2) \xi_0 - \ell (\ell \xi_0 + m \eta_0 + n \zeta_0) &= \int \frac{dv}{v} \frac{k^2}{\omega^2} \left( \xi_0 + \frac{dF}{dx} \right), \\ (\ell^2 + m^2 + n^2) \eta_0 - m (\ell \xi_0 + m \eta_0 + n \zeta_0) &= \int \frac{dv}{v} \frac{k^2}{\omega^2} \left( \eta_0 + \frac{dF}{dy} \right), \\ (\ell^2 + m^2 + n^2) \zeta_0 - n (\ell \xi_0 + m \eta_0 + n \zeta_0) &= \int \frac{dv}{v} \frac{k^2}{\omega^2} \left( \zeta_0 + \frac{dF}{dz} \right), \end{aligned} \right\} (5)$$

medens de to andre Ligninger erhoides paa analog Maade.

Nu er Lysets Hastighed i Legemet, overensstemmende med en ovenfor (S. 231) gjort Bemærkning, bestemt ved Forholdet

$$\frac{k}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}$$

og kaldes Hastigheden i det tomme Rum  $O$ , saa er det søgte Brydningsforhold  $A$  bestemt ved

$$A = O \frac{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}{k}. \quad (6)$$

Dette er i Almindelighed, naar nemlig Legemet ikke antages isotrop, ikke ens for enhver Svingningsretning, men man kan dog altid, hvad jeg paa et andet Sted (Pogg. Ann. Bd. 118) nærmere har paavist, vælge Retningen af de retvinklede Koordinataxer saaledes, at de Svingninger, som foregaae i Retning af en af disse Axer, forplante sig i en paa Svingningerne lodret Retning. Betragtes saaledes alene Svingningerne i Retning af  $x$ 'nes Axe, idet man sætter

$$\eta_0 = 0 \text{ og } \zeta_0 = 0,$$

saa er den plane Bølges Normal lodret paa  $x$ 'nes Axe, hvoraf følger

$$\ell = 0.$$

Brydningsforholdet for disse Svingninger, som vi ville betegne ved  $A_1$ , er altsaa

$$A_1 = O \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{k}.$$

Vi indføre nu istedenfor  $F$  en ny Funktion  $\varphi$  bestemt ved

$$F = c x + \varphi(c + \xi_0)$$

hvor  $c$  er en Konstant, og sætte tillige

$$\frac{O^2}{\omega^2} = 1 + \psi,$$

idet  $\psi$  altsaa er en periodisk Funktion, som forsvinder udenfor Legemet, naar dette tænkes omgivet af det tomme Rum, for hvilket  $\omega$  er lig  $O$ .

Ved disse Substitutioner forandres Ligning (3) til

$$\Delta \varphi + \frac{d}{dx} \psi \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dy} \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d}{dz} \psi \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{d\psi}{dx}, \quad (7)$$

$$\text{idet} \quad \Delta \varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

medens den første Ligning (4) bliver

$$c + (c + \xi_0) \int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

og den første Ligning (5) for  $l = 0$  giver

$$(m^2 + n^2) \xi_0 = \int \frac{dv}{v} \frac{k^2}{O^2} (1 + \psi) \left(1 + \frac{d\varphi}{dx}\right) (c + \xi_0).$$

Sættes heri

$$\frac{O^2 (m^2 + n^2)}{k^2} = A_1^2,$$

og elimineres  $c$  ved Hjælp af den ovenforstaaende Ligning, vil man finde det reducerede Brydningsforhold  $A_1$  for de her betragtede Svingninger, som ere parallelle med  $x$ 'nes Axe, bestemt ved

$$A_1^2 \left(1 + \int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dx}\right) = \int \frac{dv}{v} (1 + \psi) \left(1 + \frac{d\varphi}{dx}\right). \quad (8)$$

Heri skal  $\varphi$  bestemmes af den ovenforstaaende Differentialligning (7), hvortil slutte sig de to Betingelser, som følge af Ligningerne (4), nemlig

$$\int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad \text{og} \quad \int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dz} = 0. \quad (9)$$

Derimod betragte vi som bevist, at man kan vælge Koordinataxernes Retning saaledes, at man samtidig med  $\eta_0 = 0$  og  $\zeta_0 = 0$  har  $l = 0$ , hvorved de to sidste Ligninger (5) give

$$\int \frac{dv}{v} (1 + \psi) \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad \text{og} \quad \int \frac{dv}{v} (1 + \psi) \frac{d\varphi}{dz} = 0. \quad (10)$$

Disse Betingelser antages altsaa allerede opfyldte ved Valget af Axernes Stilling.

Af Differentialligningen (7) erhoides ved Integration

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{d}{dx} \int \frac{dv'}{r} \psi' \left( \frac{d\varphi'}{dx'} + 1 \right) + \frac{d}{dy} \int \frac{dv'}{r} \psi' \frac{d\varphi'}{dy'} + \frac{d}{dz} \int \frac{dv'}{r} \psi' \frac{d\varphi'}{dz'} \right], \quad (11)$$

hvor  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ ,  $dv' = dx' dy' dz'$  og  $\psi'$  og  $\varphi'$  de til  $\psi$  og  $\varphi$ , ved Forandring af  $x, y, z$  til  $x', y', z'$ , svarende Funktioner. Integrationen kan her tænkes



udstrakt over hele det ubegrænsede Rum; men det sees, at alle de Elementer af Integralet, for hvilke Punktet  $x', y', z'$  ligger udenfor Legemet, forsvinde paa Grund af, at  $\psi'$  her er Nul.

Vi ville nu indsætte denne Værdi for  $\varphi$  i Udtrykket

$$\int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Rumfanget  $v$ , til hvis Grændser dette Integral skal udstrækkes, og som kun skal opfylde den Betingelse at være tilstrækkelig stort til at ovenstaaende Integral kan fremstille en Middelværdi af  $\frac{d\varphi}{dx}$ , ville vi antage at være en Kugleflade, beliggende indenfor Legemet, med Centrum i Begyndelsespunktet og med en tilstrækkelig stor Radius  $R$ . Sættes

$$dv = \varrho^2 \sin \theta d\varrho d\theta d\omega,$$

saa vil det ovenforstaaende Udtryk blive

$$\int_0^R \frac{\varrho^2 d\varrho}{v} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \left( \cos \theta \frac{d\varphi}{d\varrho} - \frac{\sin \theta}{\varrho} \frac{d\varphi}{d\theta} \right).$$

Ved delvis Integration af det sidste Led med Hensyn til  $\theta$  forandres dette Udtryk til

$$\int_0^R \frac{d\varrho}{v} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{d}{d\varrho} \varrho^2 \varphi. \quad (12)$$

Betegne vi ved  $P$  den Del af dette Integral, som erholdes ved istedenfor  $\varphi$  at indsætte det første Led i (11), og sættes

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx} \int \frac{dv'}{r} \psi' \left( \frac{d\varphi'}{dx'} + 1 \right) = \left( \cos \theta \frac{d}{d\varrho} - \frac{\sin \theta}{\varrho} \frac{d}{d\theta} \right) \int_0^\infty \varrho'^2 d\varrho' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \frac{f'}{r},$$

idet sfæriske Koordinater ogsaa her indføres og for Kortheds Skyld  $f'$  sættes istedenfor  $\frac{1}{4\pi} \psi' \left( \frac{d\varphi'}{dx'} + 1 \right)$ , saa erholdes

$$P = \int_0^R \frac{d\varrho}{v} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{d}{d\varrho} \varrho^2 \left( \cos^2 \theta \frac{d}{d\varrho} + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{\varrho} \right) \int_0^\infty \varrho'^2 d\varrho' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \frac{f'}{r},$$

hvor  $r = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\omega - \omega'))}$ .

Nu er, som bekendt,

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{1}{r} = \begin{cases} \frac{4\pi}{\varrho} & \text{for } \varrho > \varrho' \\ \frac{4\pi}{\varrho'} & \text{for } \varrho < \varrho' \end{cases}$$

$$\text{og} \quad \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r} = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi (3 \cos^2 \theta' - 1) \frac{\varrho'^2}{\varrho^3} & \text{for } \varrho > \varrho' \\ \frac{4}{3} \pi (3 \cos^2 \theta' - 1) \frac{\varrho^2}{\varrho'^3} & \text{for } \varrho < \varrho', \end{cases}$$

ved Hjælp af hvilke Formler man vil finde

$$P = \frac{4}{3} \pi \int_0^\pi \sin \theta' \, d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\varrho}{v} \cdot \frac{d}{d\varrho} \left[ - \int_0^{\varrho} \varrho'^2 f' \, d\varrho' + 5 (\cos^2 \theta' - \frac{1}{3}) \varrho^3 \int_{\varrho'}^\infty \frac{d\varrho'}{\varrho'} f' \right].$$

$$\text{Heri er} \quad \int_0^R \frac{d\varrho}{v} \frac{d}{d\varrho} \int_0^{\varrho} \varrho'^2 f' \, d\varrho' = \int_0^R \frac{d\varrho'}{v} \varrho'^2 f'$$

$$\text{og} \quad \frac{4\pi}{3} \int_0^R \frac{d\varrho}{v} \frac{d}{d\varrho} \varrho^3 \int_{\varrho'}^\infty \frac{d\varrho'}{\varrho'} f' = \int_R^\infty \frac{d\varrho'}{\varrho'} f',$$

$$\text{idet } v = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Da Legemet og derfor ogsaa  $R$  kan tænkes saa stort, som man vil, saa er det sidste Udtryk en forsvindende lille Størrelse, og man faaer alene

$$P = - \frac{4}{3} \pi \int_0^R \frac{d\varrho'}{v} \varrho'^2 \int_0^\pi \sin \theta' \, d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' f',$$

eller, naar atter retvinklede Koordinater indføres og  $f'$  gives den oprindelige Betydning,

$$P = - \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v} \psi \left( \frac{d\varphi}{dx} + 1 \right).$$

Vi have endvidere tilbage at indsætte i Integralet (12) istedenfor  $\varphi$  de to andre Led fra Ligningen (11). Ved paa samme Maade at udføre Regningen for disse to Led, vil man imidlertid finde, at Resultatet her bliver Nul, saa at man altsaa erholder

$$\int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dx} = - \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v} \psi \left( \frac{d\varphi}{dx} + 1 \right). \quad (13)$$

I Analogi hermed sees det, at man maa have

$$\int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dy} = - \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v} \psi \frac{d\varphi}{dy} \quad \text{og} \quad \int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dz} = - \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v} \psi \frac{d\varphi}{dz},$$

hvilke Ligninger tjene til at vise, at Integralet  $\varphi$ , saaledes som det er bestemt ved (11), opfylder de to Betingelser (9), idet disse nu ved de ovenforstaaende to Ligninger lade sig udlede af Ligningerne (10).

Det reducerede Brydningsforhold  $A_1$  for Lyssvingningerne i Retning af  $x$ 'nes Axe var i Ligning (8) bestemt ved

$$A_1^2 \left( 1 + \int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dx} \right) = \int \frac{dv}{v} (1 + \psi) \left( 1 + \frac{d\varphi}{dx} \right);$$

heraf kunne vi nu ved Hjælp af (13) eliminere  $\int \frac{dv}{v} \frac{d\varphi}{dx}$  og saaledes erholde

$$\frac{A_1^2 - 1}{A_1^2 + 2} v = \frac{1}{3} \int dv \psi \left( 1 + \frac{d\varphi}{dx} \right). \quad (14)$$

Paa samme Maade kan Brydningsforholdet for Svingningerne i Retning af  $y$ 'nes eller  $z$ 'nes Axe bestemmes, og de til (14) og (7) svarende Ligninger kunne let dannes af disse ved Analogi. For *isotrope* Legemer ere selvfølgelig den ovenfor udførte Regning almindelig gjældende for en hvilkenksomhelst Retning af Lyssvingningerne.

Regningen er indtil dette Punkt gennemført uden nogen hypotetisk Forudsætning. Ved at sammenholde det her vundne Resultat med de Resultater, Forsøgene give, fremstiller der sig nu en meget nær liggende Hypothese, som det da gjælder om nærmere at udvikle i dens theoretiske Konsekvenser, og det maa da vise sig, om der er Mulighed for paa denne Maade at komme til Kundskab om Legemernes indre molekulære Forhold.

Det er bekjendt, at Forsøgene med en vis Grad af Tilnærmelse vise, at Brydnings-  
evnen  $(A^2 - 1)v$  og endnu nærmere Produktet  $(A - 1)v$ , som ogsaa kan gives Formen  $\frac{A^2 - 1}{A + 1}v$ , bliver konstant ved Forandring af Legemets Rumfang. Heraf kan man da slutte, at ogsaa den i (14) angivne Funktion af Brydningsforhold og Rumfang, nemlig

$$\frac{A^2 - 1}{A^2 + 2} v,$$

med samme Ret kan betragtes som tilnærmelsesvis konstant.

Det ligger da nærmest at prøve, hvorvidt dette har sin Grund i Uforanderligheden af Funktionen  $\psi$  eller, hvad der er det samme, af de molekulære Brydningsforhold  $\left(\frac{O}{\omega}\right)$ . En umiddelbar Følge heraf er *Antagelsen af uforanderlige, ved tomt Rum adskilte Molekuler*. Disse maae nødvendigvis betragtes som gjennemsgitige, da ellers ikke Legemet selv vilde kunne være fuldkommen gjennemsgitigt.

Funktionen  $\psi = \frac{O^2}{\omega^2} - 1$  er altsaa ifølge denne Hypothese uforanderlig indenfor Legemets Molekuler og Nul udenfor disse, saaat alle Elementer af Integralet i (14) forsvinde udenfor Molekulerne. Dette Integral indeholder foruden det uforanderlige Led  $\psi$  ogsaa Funktionen  $\varphi$ , som vi nu skulle søge nærmere at bestemme for de *isotrope Legemer*, uden dog at indføre nogen yderligere indskrænkende Forudsætning med Hensyn til Molekulernes Form eller Brydningsforhold. Om saaledes et Molekul skal betragtes som enkelt eller som et System af flere uforanderlig forbundne, faaer derfor ingen Betydning i den følgende Regning.

I det her betragtede isotrope Legeme tænke vi os Molekulerne *uregelmæssig* lejrede, saaledes at alle de ensartede Molekuler findes omdrejede i Legemet i alle mulige forskjellige Stillinger. Lægges i ethvert Molekul et med Molekulet fast forbundet Koordinatsystem,

hvis Axer, som vi ville betegne med  $a$ ,  $b$  og  $c$ , lægges gennem de ensartede Punkter i alle ensartede Molekuler, saa vil et Punkt i en af disse Axer fra det ene Molekul til det andet efterhaanden gennemløbe alle Elementer af en Kugleflade.

Af Differentialligning (7) for Funktionen  $\varphi$  er Integralet (11) udledet, hvilket ogsaa kan gives Formen

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv'}{r} \left[ \frac{d}{dx'} \psi' \left( \frac{d\varphi'}{dx'} + 1 \right) + \frac{d}{dy'} \psi' \frac{d\varphi'}{dy'} + \frac{d}{dz'} \psi' \frac{d\varphi'}{dz'} \right].$$

Dette Integral, som er udstrakt over hele Legemet, kan deles i to Dele, hvoraf den ene alene omfatter det enkelte Molekul, hvortil Punktet  $x$ ,  $y$ ,  $z$  hører, medens den anden Del strækker sig over alle de andre udenfor dette. Vi ville betegne den første Del ved  $\int^{(i)}$  og den anden ved  $\int^{(e)}$ .

Sættes nu

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{4\pi} \int^{(i)} \frac{dv'}{r} \left[ \frac{d}{dx'} \psi' \left( \frac{dX'}{dx'} + 1 \right) + \frac{d}{dy'} \psi' \frac{dX'}{dy'} + \frac{d}{dz'} \psi' \frac{dX'}{dz'} \right], \\ X_1 &= \frac{1}{4\pi} \int^{(e)} \frac{dv'}{r} \left[ \frac{d}{dx'} \psi' \left( \frac{dX'}{dx'} + 1 \right) + \frac{d}{dy'} \psi' \frac{dX'}{dy'} + \frac{d}{dz'} \psi' \frac{dX'}{dz'} \right], \\ X_2 &= \frac{1}{4\pi} \int^{(i)} \frac{dv'}{r} \left[ \frac{d}{dx'} \psi' \frac{dX_1'}{dx'} + \frac{d}{dy'} \psi' \frac{dX_1'}{dy'} + \frac{d}{dz'} \psi' \frac{dX_1'}{dz'} \right], \\ X_3 &= \frac{1}{4\pi} \int^{(e)} \frac{dv'}{r} \left[ \frac{d}{dx'} \psi' \frac{dX_1'}{dx'} + \frac{d}{dy'} \psi' \frac{dX_1'}{dy'} + \frac{d}{dz'} \psi' \frac{dX_1'}{dz'} \right], \\ &\vdots \end{aligned} \right\} (15)$$

og fortsættes saaledes i det uendelige, saa vil man ved Addition af disse Ligninger erholde den ovenforstaaende Ligning for  $\varphi$ , naar man sætter

$$X + X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \varphi. \quad (16)$$

Tilsvarende Udtryk, som erholdes ved Ombytning af Bogstaverne  $X$  og  $x$  med  $Y$  og  $y$  eller med  $Z$  og  $z$ , ville vi betegne ved  $Y$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $\dots$  og  $Z$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $\dots$ .

Have vi for det betragtede Molekul bestemt en Funktion  $\mathfrak{A}$  af Koordinaterne  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , som ere uafhængige af Molekulets Stilling i Rummet, ved Ligningen

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv'}{r} \left[ \frac{d}{da'} \psi' \left( \frac{d\mathfrak{A}'}{da'} + 1 \right) + \frac{d}{db'} \psi' \frac{d\mathfrak{A}'}{db'} + \frac{d}{dc'} \psi' \frac{d\mathfrak{A}'}{dc'} \right],$$

hvor  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  tænkes istedenfor  $x$ ,  $y$ ,  $z$  og  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  i  $dv'$ ,  $r$  og  $\psi'$ , og er ligeledes Funktionerne  $\mathfrak{B}$  og  $\mathfrak{C}$  bestemte ved de to hermed analoge Ligninger, som fremkomme ved Ombytning af Bogstaverne  $\mathfrak{A}$ ,  $a$  med  $\mathfrak{B}$ ,  $b$  og med  $\mathfrak{C}$ ,  $c$ , saa kunne vi heraf let be-

stemme Funktionen  $X$ , gjældende for en hvilken som helst Stilling af Molekulet. Denne Stilling være bestemt ved Vinklen  $\theta$ , som  $x$ 'nes Axe danner med  $a$ 'nes Axe, og ved Vinklen  $\omega$ , som Koordinatplanen  $ab$  danner med en Plan gennem  $x$ 'nes og  $a$ 'nes Axe.

Man multiplicere den ovenstaaende Ligning for  $\mathfrak{X}$  med  $\cos \theta$ , og Ligningerne for  $\mathfrak{B}$  og  $\mathfrak{C}$  henholdsvis med  $\sin \theta \cos \omega$  og  $\sin \theta \sin \omega$ , og addere de erhholdte tre Ligninger. Bemærkes det nu, at man for enhver Funktion  $F$  har

$$\frac{d}{da} \psi \frac{dF}{da} + \frac{d}{db} \psi \frac{dF}{db} + \frac{d}{dc} \psi \frac{dF}{dc} = \frac{d}{dx} \psi \frac{dF}{dx} + \frac{d}{dy} \psi \frac{dF}{dy} + \frac{d}{dz} \psi \frac{dF}{dz},$$

og desuden, at man har

$$\frac{d\psi'}{da'} \cos \theta + \frac{d\psi'}{db'} \sin \theta \cos \omega + \frac{d\psi'}{dc'} \sin \theta \sin \omega = \frac{d\psi'}{dx'},$$

saa sees det, at den erhholdte Sum faaer samme Form, som den første Ligning (15), og at man ved Sammenligning med denne faaer

$$X = \mathfrak{X} \cos \theta + \mathfrak{B} \sin \theta \cos \omega + \mathfrak{C} \sin \theta \sin \omega.$$

Vi skulle nu ved i Ligning (14) efterhaanden at indsætte  $X$ ,  $X_1$  o. s. v. for  $\varphi$  søge at bestemme Værdien af de saaledes fremkomne Led, og have altsaa først at bestemme

$$\int dv \psi \frac{dX}{dx},$$

hvor Integralet omfatter alle Legemets Molekuler. Denne Integration kan udføres saaledes, at man fra et Punkt i et Molekul gaaer over til det tilsvarende Punkt i et andet hermed ensartet Molekul og saaledes videre til alle ensartede, paa forskjellig Maade stillede, Molekuler, hvorefter først Integralet tages for alle Punkter i Molekulet. Det samme kan kortere udtrykkes paa en anden Maade, hvad vi i det Følgende ville foretrække, nemlig saaledes, at man istedenfor det Element i ovenstaaende Integral, som tilhører Punktet  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i et Molekul, tager *Middelværdien* af alle de Værdier, dette Element erhholder ved Molekulets *Omdrejning* i alle Retninger. Er saaledes Molekulets Stilling ligesom ovenfor bestemt ved Vinklerne  $\theta$  og  $\omega$ , saa sættes

$$\int dv \psi \frac{dX}{dx} = \int dv \psi \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{dX}{dx}.$$

Vi have nu

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{da} \cos \theta + \frac{dX}{db} \sin \theta \cos \omega + \frac{dX}{dc} \sin \theta \sin \omega,$$

og

$$X = \mathfrak{X} \cos \theta + \mathfrak{B} \sin \theta \cos \omega + \mathfrak{C} \sin \theta \sin \omega.$$

Indsættes disse Værdier ovenfor, erhholdes ved Integration

$$\int dv \psi \frac{dX}{dx} = \frac{1}{3} \int dv \psi \left( \frac{d\mathfrak{X}}{da} + \frac{d\mathfrak{B}}{db} + \frac{d\mathfrak{C}}{dc} \right), \quad (17)$$

et Udtryk, som er uafhængigt af Molekulernes Afstande og derfor ogsaa, ifølge vor Forudsætning, af Legemets Varmegrad og Rumfang.

Vi gaa dernæst over til Bestemmelsen af

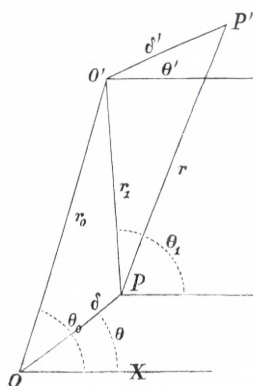
$$\int dv \psi \frac{dX_1}{dx},$$

hvor  $X_1$  er bestemt ved den anden Ligning (15), som ogsaa ved Hjælp af den første Ligning kan gives den kortere Form

$$X_1 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv'}{r} \Delta' X',$$

$$\Delta' = \frac{d^2}{dx'^2} + \frac{d^2}{dy'^2} + \frac{d^2}{dz'^2} = \frac{d^2}{da'^2} + \frac{d^2}{db'^2} + \frac{d^2}{dc'^2}.$$

Fig. 3.



I Fig. 3 er Koordinaternes Begyndelsespunkt  $O$  lagt indenfor et Molekul i et Punkt, hvoromkring dette kan drejes uden at Molekulernes indbyrdes Ligevægt derved forstyrres. Vi ville kalde et saadant Punkt Molekulets *Centralpunkt*.  $P$  er et Punkt i det samme Molekul, bestemt ved Koordinaterne  $x, y, z$  eller i sfæriske Koordinater ved Afstanden  $OP = \delta$  fra Begyndelsespunktet, Vinklen  $\theta$ , som  $x$ 'nes Axe danner med  $OP$ , og Hældningsvinklen  $\omega$  imellem Planen  $xOP$  og Koordinatplanen  $xy$ . Endvidere er  $O'$  Centralpunktet for et andet Molekul og bestemt ved Koordinaterne  $x_0, y_0, z_0$ ,  $P'$  et Punkt i dette, bestemt ligesom  $P$  ved Koordinaterne  $x', y', z'$  eller ved  $O'P' = \delta'$  og Vinklerne  $\theta'$  og  $\omega'$ . Fremdeles sættes  $PP' = r$ ,  $PO' = r_1$  og  $OO' = r_0$ , og de to sidste Liniers Retninger være paa samme Maade bestemt ved  $\theta_1, \omega_1$  og  $\theta_0, \omega_0$ .

Det i Molekulet faste Koordinatsystem tænkes i det andet Molekul (i  $O'$ ) lagt saaledes, at  $a'$ -Aksen falder i  $OP'$  og Koordinatplanerne  $a'b'$  og  $xy$  begge danne den samme Vinkel  $\omega'$  med Planen  $x'O'P'$ .

Middelværdien af  $\frac{1}{r} \Delta' X'$  for alle Stillinger af det andet Molekul, naar dette drejes om  $O'$ , vil være

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{d\omega'}{r} \Delta' X',$$

hvor  $r = \sqrt{r_1^2 + \delta'^2 - 2r_1\delta'(\cos \theta' \cos \theta_1 + \sin \theta' \sin \theta_1 \cos(\omega' - \omega_1))}$   
og  $X' = \mathfrak{A}' \cos \theta' + \mathfrak{B}' \sin \theta' \cos \omega' + \mathfrak{C}' \sin \theta' \sin \omega'$ .

Udføres Integrationen, erholdes

$$\frac{\delta'}{3r_1^2} [\Delta' \mathfrak{A}' \cos \theta_1 + \Delta' \mathfrak{B}' \sin \theta_1 \cos \omega_1 + \Delta' \mathfrak{C}' \sin \theta_1 \sin \omega_1],$$

hvilket Udtryk kan, idet  $r_1 \cos \theta_1 = x_0 - x$ ,  $r_1 \sin \theta_1 \cos \omega_1 = y_0 - y$ ,  
 $r_1 \sin \theta_1 \sin \omega_1 = z_0 - z$ , gives Formen

$$\frac{\delta'}{3} \left[ \Delta' \mathfrak{A}' \frac{d}{dx} \frac{1}{r_1} + \Delta' \mathfrak{B}' \frac{d}{dy} \frac{1}{r_1} + \Delta' \mathfrak{C}' \frac{d}{dz} \frac{1}{r_1} \right].$$

Dernæst kan Legemet tænkes omdrejet om Begyndelsespunktet  $O$ , det første Molekuls Centralpunkt, medens dette Molekul forbliver i uforandret Stilling. Herved vil i ovenstaaende Udtryk kun  $r_1$  forandre Værdi, og man finder, idet

$$r_1 = \sqrt{r_0^2 + \delta^2 - 2r_0\delta (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos (\omega_0 - \omega))},$$

som Middelværdi af  $\frac{1}{r_1}$  for alle Stillinger

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta_0 d\theta_0 \int_0^{2\pi} d\omega_0 \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0}.$$

Da denne Størrelse er uafhængig af  $x$ ,  $y$  og  $z$ , vil den ved at indsættes for  $\frac{1}{r_1}$  i ovenstaaende Udtryk gøre dette lig Nul. Altsaa er ogsaa

$$\int dv \psi \frac{dX_1}{dx} = 0. \quad (18)$$

Dernæst søges

$$\int dv \psi \frac{dX_2}{dx},$$

hvor  $X_2$ , ifølge den tredie Ligning (15), er bestemt ved

$$X_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(e)} \frac{dv'}{r} \left[ \frac{d}{dx'} \psi' \frac{dX_1'}{dx'} + \frac{d}{dy'} \psi' \frac{dX_1'}{dy'} + \frac{d}{dz'} \psi' \frac{dX_1'}{dz'} \right].$$

Heri er  $dv'$  et Element af det første Molekul, hvori Punktet  $O$  ligger. Da dette Molekul i den ovenfor angivne Regning forblev i uforandret Stilling, saa vil Resultatet ogsaa her blive gyldigt, saaledes at ogsaa her Middelværdien af  $X_1'$  bliver Nul. Altsaa er

$$\int dv \psi \frac{dX_2}{dx} = 0. \quad (19)$$

Vi ville endvidere søge at bestemme

$$\int dv \psi \frac{dX_3}{dx},$$

hvor vi, ifølge den fjerde Ligning (15), have

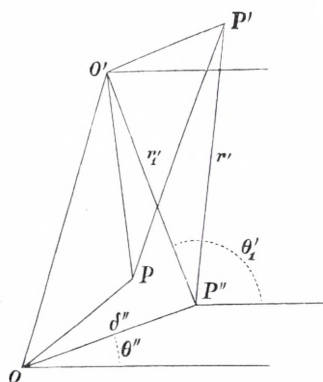
$$X_3 = \frac{1}{4\pi} \int_{(e)} \frac{dv'}{r} \left[ \frac{d}{dx'} \psi' \frac{dX_1'}{dx'} + \frac{d}{dy'} \psi' \frac{dX_1'}{dy'} + \frac{d}{dz'} \psi' \frac{dX_1'}{dz'} \right],$$

$$X_1' = -\frac{1}{4\pi} \int_{(e)} \frac{dv''}{r'} \Delta'' X''.$$

Heri tilhører  $dv'$  et Molekul i  $O'$  udenfor det første Molekul i  $O$ , og  $dv''$  et Molekul atter udenfor det andet Molekul i  $O'$ . Et Punkt i det tredje Molekul er bestemt ved Koordinaterne  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ , og  $r'$  er Afstanden fra Punktet  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  til dette Punkt. Vi maae nu adskille to Tilfælde, idet det tredje Molekul *enten* er forskjelligt fra det første, *eller* er netop det samme.

I *det første Tilfælde* kan man anvende den samme Fremgangsmaade som ovenfor, med den Forskjel, at det nu er det tredje Molekul, som drejes om sit Centralpunkt  $O''$ , medens hele Legemet drejes om det andet Molekuls Centralpunkt  $O'$ . Her indtræder imidlertid den Vanskelighed, at det første Molekul under denne Bevægelse maae forblive paa sin Plads, for at Koordinaterne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  kunne forblive uforandrede, men dette er i Almindelighed ikke muligt uden Forandring af de andre Molekulers relative Stillinger, hvilke Forandringer da maatte medtages i Beregningen. Vi maae derfor tænke os Legemets Omdrejning om  $O'$  udført under smaa Forandringer saavel af det første Molekuls Stilling som af alle de andre omgivende, saaledes som Betingelserne for Molekulernes Ligevægt udfordre det. Disse Betingelser kunne imidlertid aabenbart tilfredsstilles paa uendelig mange Maader, saa at de smaa Forandringer, man nødes til at gjøre i Molekulernes relative Stillinger, *til en vis Grad blive arbitrære* og kunne varieres paa uendelig mange Maader. Heraf tør man drage den Slutning, at disse smaa Forandringer i Molekulernes Stilling under Legemets Omdrejning ingen Indflydelse kunne have paa det endelige Resultat, hvoraf altsaa følger, at den Del af  $X_3$ , for hvilken dette Tilfælde gjælder, bliver Nul.

Fig. 4.



for  $r'$ . Vi ville i det følgende regne Retningen *fra*  $P''$  og derfor med Forandring af Fortegnet sætte

$$X_{1'} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv''}{r'} \triangle'' X''.$$

I *det andet Tilfælde* tilhøre Punkterne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  og  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  det samme Molekul. I Fig. 4 ere Punkterne  $O$ ,  $P$ ,  $O'$ ,  $P'$ , de samme som i Fig. 3 og bestemte paa samme Maade. Desuden er  $P''$  Punktet  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  og bestemt ved sfæriske Koordinater paa samme Maade som  $P$  ved  $OP'' = \delta''$  og Vinklerne  $\theta''$  og  $\omega''$ ; tillige sættes  $O'P'' = r_1'$ , for hvilken Linie Retningen er bestemt ved Vinklerne  $\theta_1'$  og  $\omega_1'$ , og  $P'P'' = r'$ . Retningen af de to sidste Linier maa regnes *fra*  $O'$  og  $P'$  til  $P''$ , saa at man enten maa addere  $180^\circ$  til de Vinkler, disse Linier danne med  $x'$ nes Axe, naar man vil regne dem i Retning fra  $P''$  til  $O'$  og  $P'$ , eller man maa forandre Fortegnet



Ved en let Transformation af det ovenforstaaende Udtryk for  $X_3$  findes

$$X_3 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int dv'' \Delta'' X'' \int^{(e)} dv' \psi' \left[ \frac{d^2}{dx dx''} \frac{1}{r r'} + \frac{d^2}{dy dy''} \frac{1}{r r'} + \frac{d^2}{dz dz''} \frac{1}{r r'} \right],$$

hvori  $r$  er uafhængig af  $x'', y'', z''$ , ligesom  $r'$  er uafhængig af  $x, y, z$ .

Ved Omdrejning af det andet Molekul om  $O'$  forandres i dette Udtryk kun  $r$  og  $r'$ , og man finder som Middelværdi af  $\frac{1}{r r'}$  for alle Stillinger

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \frac{1}{r r'} = \frac{1}{r_1 r_1'} + \frac{\delta'^2 \cos \gamma_1}{3 r_1^2 r_1'^2} + \frac{\delta'^4 (3 \cos^2 \gamma_1 - 1)}{10 r_1^3 r_1'^3} + \dots,$$

$$\text{idet } r = \sqrt{r_1^2 + \delta'^2 - 2 r_1 \delta' (\cos \theta_1 \cos \theta' + \sin \theta_1 \sin \theta' \cos (\omega_1 - \omega'))}$$

$$r' = \sqrt{r_1'^2 + \delta'^2 - 2 r_1' \delta' (\cos \theta_1' \cos \theta' + \sin \theta_1' \sin \theta' \cos (\omega_1' - \omega'))}$$

$$\text{og } \cos \gamma_1 = \cos \theta_1 \cos \theta_1' + \sin \theta_1 \sin \theta_1' \cos (\omega_1 - \omega_1').$$

Benytte vi for Kortheds Skyld en symbolsk Betegnelsmaade, idet vi betegne Operationen  $\frac{d^2}{dx dx''} + \frac{d^2}{dy dy''} + \frac{d^2}{dz dz''}$  ved  $\Delta''$ , og endvidere  $\Delta''$ ,  $\Delta''^2$ , ved  $\Delta''^2$ , o. s. v., og bemærkes, at man har  $r_1 \cos \theta_1 = x_0 - x$ ,  $r_1' \cos \theta_1' = x_0 - x''$ ,  $r_1 \sin \theta_1 \cos \omega_1 = y_0 - y$ , o. s. v., saa kan ovenstaaende bekendte Række gives den ret mærkelige Form

$$\left[ 1 + \frac{2 \delta'^2 \Delta''}{1.2.3} + \frac{2^2 \delta'^4 \Delta''^2}{1.2.3.4.5} + \dots \right] \frac{1}{r_1 r_1'},$$

hvilket Udtryk indsat i  $X_3$  istedenfor  $\frac{1}{r r'}$  giver

$$X_3 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int dv'' \Delta'' X'' \int^{(e)} dv' \psi' \left[ \Delta'' + \frac{2 \delta'^2 \Delta''^2}{1.2.3} + \dots \right] \frac{1}{r_1 r_1'}.$$

Omdrejes dernæst Legemet om  $O$ , medens det første Molekul forbliver fast, saa findes som Middelværdi af  $\frac{1}{r_1 r_1'}$  for alle Stillinger

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta_0 d\theta_0 \int_0^{2\pi} d\omega_0 \frac{1}{r_1 r_1'} = \frac{1}{r_0^2} + \frac{\delta'' \cos \gamma}{3 r_0^4} + \frac{\delta''^2 (3 \cos^2 \gamma - 1)}{10 r_0^6} + \dots,$$

$$\text{idet } r_1 = \sqrt{r_0^2 + \delta''^2 - 2 r_0 \delta'' (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos (\omega_0 - \omega))},$$

$$r_1' = \sqrt{r_0'^2 + \delta''^2 - 2 r_0' \delta'' (\cos \theta_0 \cos \theta'' + \sin \theta_0 \sin \theta'' \cos (\omega_0 - \omega''))},$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta'' + \sin \theta \sin \theta'' \cos (\omega - \omega'').$$

Bemærkes det, at man har

$$\delta \delta'' \cos \gamma = x x'' + y y'' + z z'',$$

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \delta''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

vil man let kunne tage  $\Delta''$ ,  $\Delta''^2$ , o. s. v. af denne Række, og man vil da komme til tilsvarende Rækker, for hvilke en simpel Lov lader sig udlede. Vi skulle dog ikke nærmere gaae ind herpaa, da vi ville indskrænke Regningen alene til de første Led. Indsættes Rækken istedenfor  $\frac{1}{r_1 r_1'}$  i Udtrykket ovenfor for  $X_3$ , og bortkastes de Potenser af  $\frac{1}{r_0}$ , som ere højere end sjette, vil man erholde

$$X_3 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int dv'' \Delta'' X'' \int^{(e)} dv' \psi' \left( \frac{1}{r_0^4} + 2 \frac{xx'' + yy'' + zz'' + \delta'^2}{r_0^6} \right).$$

Heraf følger

$$\int dv \psi \frac{dX_3}{dx} = -\frac{1}{8\pi^2} \int dv \psi \int dv'' \Delta'' X'' \cdot x'' \int^{(e)} \frac{dv' \psi'}{r_0^6}.$$

Sættes her i Integralet  $\int dv'' \Delta'' X'' \cdot x''$  ifølge den første Ligning (15)

$$\Delta'' X'' = -\left[ \frac{d}{dx''} \psi'' \left( \frac{dX''}{dx''} + 1 \right) + \frac{d}{dy''} \psi'' \frac{dY''}{dy''} + \frac{d}{dz''} \psi'' \frac{dZ''}{dz''} \right],$$

og integreres delvis, saa vil, da  $\psi''$  forsvinder ved Grænsen, dette Integral blive

$$\int dv'' \psi'' \left( \frac{dX''}{dx''} + 1 \right),$$

hvilket Udtryk endvidere ved Omdrejning af det første Molekul, paa samme Maade som ved Bestemmelsen af Ligning (17), bliver

$$\int dv'' \psi'' \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{d\mathfrak{A}''}{da''} + \frac{d\mathfrak{B}''}{db''} + \frac{d\mathfrak{C}''}{dc''} \right) \right).$$

Da Elementerne i dette Integral tilhøre det samme Molekul, som Elementerne af Integralet  $\int dv \psi$ , ville vi udelade Mærketegnene, og erholde altsaa

$$\int dv \psi \frac{dX_3}{dx} = -\frac{1}{8\pi^2} \int dv \psi \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{d\mathfrak{A}}{da} + \frac{d\mathfrak{B}}{db} + \frac{d\mathfrak{C}}{dc} \right) \right) \int^{(e)} dv' \psi' \frac{1}{r_0^6}. \quad (20)$$

Standse vi nu ved denne Approximation og indsætte de erholdte Resultater i Ligning (14), vil denne Ligning, idet de her betragtede isotrope Legemers reducerede Brydningsforhold betegnes ved  $A$ , give

$$\frac{A^2 - 1}{A^2 + 1} v = \frac{1}{3} \int dv \psi \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{d\mathfrak{A}}{da} + \frac{d\mathfrak{B}}{db} + \frac{d\mathfrak{C}}{dc} \right) \right) \left[ 1 - \frac{1}{8\pi^2} \int dv' \psi' \frac{1}{r_0^6} \right]. \quad (B)$$

Bestaaer et Legeme kun af *ensartede* Molekuler, hvoraf dog hvert enkelt kan være sammensat af flere, naar kun disse ere uforanderlig forbundne, og sættes

$$\int dv \psi = \nu, \quad \int dv \psi \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{d\mathfrak{A}}{da} + \frac{d\mathfrak{B}}{db} + \frac{d\mathfrak{C}}{dc} \right) \right) = \mu,$$

hvor vi alene ville lade Integrationen udstrække sig over *et* Molekul, og hvis det er sam-

mensat, da over det sammensatte Molekul, saa er, naar vi kalde Antallet af disse Molekuler  $s$ ,

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = \frac{1}{3}\mu s \left(1 - \frac{v^2}{8\pi^2} \Sigma \frac{1}{r_0^6}\right).$$

Heri betegner  $r_0$  Afstanden fra Centralpunktet af et vilkaarligt Molekul i Legemets Indre til ethvert af de andre Molekulers Centralpunkter, og  $\Sigma$  er da Summen for alle disse Værdier af  $r_0$ . Man vil altsaa have  $\Sigma \frac{1}{r_0^6}$  omvendt proportional med Kvadratet af Legemets Rumfang  $v$ , og denne Sum vil nærmere kunne bestemmes, saasnart man vil forudsætte en vis Lejringsmaade af Molekulerne. Antage vi saaledes, kun for at gjøre dette mere anskueligt, at Molekulerne ere lejrede i Hjørnerne af ligestore Kuber, hvis Sidelinie, Molekulernes mindste indbyrdes Afstande, være  $R$ , og sættes

$$\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^3} = \alpha^2,$$

idet  $\Sigma$  er Summen for alle hele Værdier af  $m$ ,  $n$  og  $p$  fra  $-\infty$  til  $+\infty$ , alene den enkelte Værdi  $m = n = p = 0$  undtagen, saa er

$$\Sigma \frac{1}{r_0^6} = \frac{\alpha^2}{R^6} \text{ og } v = sR^3,$$

altsaa er

$$\Sigma \frac{1}{r_0^6} = \frac{\alpha^2 s^2}{v^2}.$$

Ved en anden Lejringsmaade af Molekulerne vil her kun  $\alpha$  faae en anden numerisk Værdi. Sættes nu

$$\frac{1}{3}\mu s = P, \quad \frac{\alpha^2 v^2 s^2}{8\pi^2} = a^2,$$

saa bliver den ovenforstaaende Ligning for Brydningsforholdet

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = P \left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right), \quad (\text{C})$$

hvor  $P$  og  $a^2$  ere to af Temperatur og Rumfang uafhængige positive Konstanter, og Rumfanget  $v$  nærmere kan være bestemt som Rumfanget af en Vægtenhed af Legemet. For Dampe og Luftarter vil denne Ligning med tilstrækkelig Tilnærmelse blive

$$\frac{2}{3}(A-1)v = P.$$

Ere Legemets Molekuler sammensatte af flere, som ikke ere uforanderlig forbundne, eller ere de molekulære Brydningsforhold selv afhængige af Temperatur og Rumfang, saa vil vel endnu Ligning (B) kunne vedblive at være gjældende, men den har da aabenbart tabt sin praktiske Betydning, saalænge man ikke kjender de Love, hvorefter disse indre Forandringer foregaae.

Er Legemet en *Blanding* af flere andre, og søge vi af disses Brydningsforhold at

bestemme Blandingens, saa bliver der, selv om vi vedblive at fastholde Antagelsen af Molekulernes Uforanderlighed, dog endnu en Hypothese at gjøre, da vi ikke kjende den Maade, hvorpaa de forskjellige Molekuler indbyrdes ordne sig. Vi ville her forudsætte, at Lejringsmaaden af Molekulerne i Blandingen og i dens enkelte Bestanddele er den samme. Antages for Exempel Molekulerne i Blandingens Bestanddele ordnede i Hjørnerne af ligestore Kuber, saa forudsættes det samme for Blandingen, og de forskjellige Molekuler ville da være iflæng fordelte i Hjørnerne.

Bestaaer Blandingen af to Slags ensartede Molekuler, og er Antallet af disse i en Vægtenhed af Legemet  $s_1$  og  $s_2$ , ere endvidere  $\nu_1$  og  $\nu_2$ ,  $\mu_1$  og  $\mu_2$  de til  $\nu$  og  $\mu$  svarende Størrelser for de to Slags Molekuler, saa erholdes af Ligning (B)

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = \frac{1}{3}s_1\mu_1 + \frac{1}{3}s_2\mu_2 - \frac{\alpha^2}{8\pi^2L^6} \left( \frac{1}{3}s_1\mu_1\nu_1 + \frac{1}{3}s_2\mu_2\nu_2 \right) \frac{s_1\nu_1 + s_2\nu_2}{s_1 + s_2}.$$

Vi kunne heri sætte

$$R^3(s_1+s_2)=v, \quad \frac{1}{3}s_1\mu_1=p_1P_1, \quad \frac{1}{3}s_2\mu_2=p_2P_2, \quad \frac{\alpha^2}{8\pi^2}\nu_1^2s_1^2=p_1^2a_1^2, \quad \frac{\alpha^2}{8\pi^2}\nu_2^2s_2^2=p_2^2a_2^2,$$

idet  $p_1$  og  $p_2$  ere Bestanddelenes Vægtforhold og  $p_1 + p_2 = 1$ , medens  $P_1$  og  $a_1$ ,  $P_2$  og  $a_2$  ere de to til  $P$  og  $a$  svarende Konstanter for enhver af Bestanddelene. Desuden være den relative Vægt af ethvert af de to Slags Molekuler, det vil altsaa ifølge den theoretiske Kemi sige Bestanddelenes *Ækvivalenttal*, bestemte ved  $E_1$  og  $E_2$ , hvorved erholdes

$$\frac{s_1 E_1}{s_2 E_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Ved Indførelsen af disse Betegnelser vil man finde

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = p_1P_1 + p_2P_2 - \frac{1}{v^2}(p_1a_1 + p_2a_2) \left( \frac{p_1}{E_1} + \frac{p_2}{E_2} \right) (p_1P_1E_1a_1 + p_2P_2E_2a_2), \quad (D)$$

hvor altsaa Formen vedbliver at være den samme som i Ligning (C). Heraf dannes da let de tilsvarende Udtryk for Blandinger af flere Legemer.

Dette Resultat er mærkeligt derved, at Bestanddelenes *Ækvivalenttal* indgaae deri, saa at det altsaa bliver muligt ad denne Vej at bestemme disse, naar man nemlig først *med tilstrækkelig Nøjagtighed* ved Forsøg og med Benyttelse af Ligning (C) har bestemt de to i denne Ligning indgaaende Konstanter saavel for de enkelte Bestanddele som for Blandingen. Gaaer Blandingen over til at blive en *kemisk Forbindelse*, saa vil man ikke uden ganske særlige Forudsætninger kunne bestemme Formlen for dennes Brydningsforhold, hvorfor vi her ikke nærmere ville gaae ind paa denne Opgave.

Det experimentale Bevis for Rigtigheden af de her vundne Resultater maa fornemmelig udledes af Forsøg over Legemernes Brydningsforhold i forskjellige fysiske Tilstandsformer. Kjendes et Legemes Brydningsforhold og Vægtfylde alene for Exempel i draabeflydende og dampformig Tilstand, saa maa man tillige for den første Tilstand kunne bestemme de  $to$  i Ligningen (C) indgaaende Konstanter, og der bliver derfor i det Hele kun faa bekjendte, til det nævnte Øjemed tjenlige, Forsøg tilbage. Som saadanne kunne alene Forsøgene over Vand og Svovlkulstof i draabeflydende og dampformig Tilstand betragtes.

For disse to Legemer kjendes det reducerede Brydningsforhold  $A$  og Forholdet  $\frac{dA}{dv}$  for den draabeflydende Tilstand, og man kan da ved Hjælp af disse to Størrelser bestemme de to Konstanter i Ligning (C), idet man af denne udleder

$$P = \frac{3}{2} \frac{A^2 - 1}{A^2 + 1} v + \frac{3A}{(A^2 + 2)^2} v^2 \frac{dA}{dv},$$

$$a^2 P = \frac{1}{2} \frac{A^2 - 1}{A^2 + 2} v^3 + \frac{3A}{(A^2 + 2)^2} v^4 \frac{dA}{dv},$$

hvor man ogsaa, naar Vægtfylden betegnes ved  $D$ , kan sætte  $v = \frac{1}{D}$  og  $v^2 \frac{dA}{dv} = -\frac{dA}{dD}$ .

For *Vand* ved  $4^\circ$  C. findes nu af Ligning (C') i denne Afhandlings første Afsnit

$$A = 1,32194,$$

tillige er for denne Varmegrad  $v = 1$  og ifølge I (11)

$$\frac{dA}{dv} = -0,2976.$$

Heraf findes

$$P = 0,21517, \quad a^2 = 0,07296.$$

For Vanddampe er det reducerede Brydningsforhold, idet her  $v$  sættes lig 1243, bestemt ved

$$A = 1 + \frac{3P}{2v} = 1,0002597.$$

*Jamin* har for hvidt Lys fundet Brydningsforholdet lig

$$1,000261,$$

hvilket Tal, naar det formindskes lidt paa Grund af Farvespredningen, er i god Overensstemmelse med det ovenfor beregnede.

For *Svovlkulstof* ved  $20^\circ$  C. er ifølge *Willner*

$$A = 1,586424, \quad D = 1,26354, \quad \frac{dA}{dt} = -0,0007539, \quad \frac{dD}{dt} = -0,001506.$$

Heraf findes

$$P = 0,28186, \quad a^2 = 0,03578.$$

Sætte vi for Svovlkulstofdampe med *Dulong* Vægtfylden lig 2,644 i Forhold til den atmosfæriske Luft, saa beregnes heraf Brydningsforholdet for disse

$$A = 1 + \frac{3P}{2v} = 1,001445.$$

*Dulong* har for hvidt Lys Brydningsforholdet

$$1,00150,$$

som ligeledes, da Korrektionen paa Grund af Farvespredningen her maa være meget betydeligere end ved Vanddampe, er i god Overensstemmelse med den beregnede Værdi.

En anden Kontrol for Theoriens Rigtighed haves deri, at man ved Beregning af Konstanten  $a^2$ , hvad enten Legemet er enkelt eller en Blanding af flere, altid skal finde en *positiv* Værdi. Dette har jeg ogsaa i det Hele fundet stadfæstet og da navnlig ved Beregningen af saadanne Forsøg, som give en tilstrækkelig skarp Bestemmelse af denne Konstant, saaledes som Forsøgene over Legemernes Brydningsforhold og Vægtfylde saavel i dampformig som i fast eller draabeflydende Tilstand, og jeg maa udtrykkelig bemærke, at Svovl, Fosfor, Arsenik ikke danne nogen Undtagelse. De meget lave Tal, som Hr. *Schrauff* i forskjellige Afhandlinger har anført for disse Stoffers Brydningsevne i Dampform, beroe paa en ligefrem Fejltagelse, idet han urigtig har benyttet den til  $0^\circ$  og  $760^{\text{mm}}$  Tryk beregnede Vægtfylde for disse Dampe, medens Brydningsforholdene ere fundne af *Leroux* ved de paagjældende Stoffers *Kogepunkt*. *Leroux* har vel selv benyttet den samme Vægtfyldebestemmelse, men kun til en Sammenligning af Brydningsevnen for disse Dampe indbyrdes.

---

#### Rettelse.

Formlen (b) Side 219 skal være

$$\frac{ds_{Li}}{dt} = -0,450 + 2,6410 t - 0,03027 t^2$$


---



1869.